

7 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

7.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

1. Равенства $\log_a b = x$ и $a^x = b$ равносильны при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

2. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

3. Действия со степенями.

$$1. a^{b+c} = a^b \cdot a^c \quad \text{при } a > 0.$$

$$2. a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} \quad \text{при } a > 0.$$

$$3. (a^b)^c = a^{b \cdot c} \quad \text{при } a > 0.$$

4. Действия с логарифмами.

$$1. \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad \text{при } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0.$$

$$2. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{при } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0.$$

$$3. \log_a b^n = n \cdot \log_a b \quad \text{при } a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

$$4. \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b \quad \text{при } a > 0, a \neq 1, b > 0, n \neq 0.$$

$$5. \log_{a^n} b^n = \log_a b \quad \text{при } a > 0, a \neq 1, b > 0, n \neq 0.$$

5. Формулы перехода от одного основания логарифма к другому.

$$1. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{при } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1.$$

$$2. \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{при } a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1.$$

6. Показательные и логарифмические неравенства.

$$6.1. \text{ Если } a^b > a^c \text{ и } a > 1, \text{ то } b > c.$$

6.2. Если $a^b > a^c$ и $0 < a < 1$, то $b < c$.

6.3. Если $\log_a b > \log_a c$ и $a > 1$, то $b > c$.

6.4. Если $\log_a b > \log_a c$ и $0 < a < 1$, то $b < c$.

7.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите $\log_{\sqrt{2}} 9$, $\log_{64} \sqrt{3}$, $\log_2 81$, если $\log_4 3 = 0,79$.

Решение.

$$\log_{\sqrt{2}} 9 = \log_{4^{1/4}} (3^2) = 4 \cdot 2 \cdot \log_4 3 = 8 \cdot 0,79 = 6,32.$$

$$\log_{64} \sqrt{3} = \log_{4^3} (3^{1/2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_4 3 = \frac{1}{6} \cdot 0,79 = 0,1317.$$

$$\log_2 81 = \log_{4^{1/2}} (3^4) = 2 \cdot 4 \cdot \log_4 3 = 8 \cdot 0,79 = 6,32.$$

Ответ: 6,32; 0,1317; 6,32.

2. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, если $\log_a 27 = b$.

Решение.

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \log_{3^{1/2}} (a^{1/6}) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \log_{27^{1/6}} a = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \log_{27} a = \frac{1}{\log_a 27} = \frac{1}{b}.$$

Ответ: $1/b$.

3. Вычислите $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.

Решение.

$$-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2} = -\log_2 \log_2 2^{1/8} = -\log_2 \left(\frac{1}{8} \log_2 2 \right) = -\log_2 2^{-3} = 3 \log_2 2 = 3.$$

Ответ: 3.

4. Найдите $\log_{\sqrt[3]{ab}} \left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}} \right)$, если $\log_b a = 2$.

Решение.

$$\log_{\sqrt[3]{ab}} \left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}} \right) = \frac{\log_b \left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}} \right)}{\log_b \sqrt[3]{ab}} = \frac{\log_b b - \frac{1}{3} \cdot \log_b a}{\frac{1}{3} \cdot (\log_b a + \log_b b)} = \frac{1 - \frac{1}{3} \cdot 2}{\frac{1}{3} \cdot (2 + 1)} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

5. Вычислите $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2 \log_{25} 5}$.

Решение.

$$5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2 \log_{25} 5} = 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{16} + 2 \cdot \frac{1}{2}} = 5^{\log_5 16 + 1} = 5^{\log_5 16} \cdot 5 = 16 \cdot 5 = 80.$$

Ответ: 80.

6. Вычислите $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} 81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} &= (3^4)^{\log_3 5} + (3^3)^{\log_3 2 \cdot (6^2)} + 3^{4 \log_9 7} = \\ &= 3^{4 \log_3 5} + 3^{3 \log_3 6} + 3^{4 \log_3 2 \cdot 7} = 3^{\log_3 5^4} + 3^{\log_3 6^3} + 3^{2 \log_3 7} = \\ &= 3^{\log_3 625} + 3^{\log_3 216} + 3^{\log_3 49} = 625 + 216 + 49 = 890. \end{aligned}$$

Ответ: 890.

7. Найдите $\log_5 28$, если $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

Решение.

$$\log_5 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 5} = \frac{\log_{14} \frac{196}{7}}{\log_{14} 5} = \frac{\log_{14} 196 - \log_{14} 7}{\log_{14} 5} = \frac{2 \cdot \log_{14} 14 - \log_{14} 7}{\log_{14} 5} = \frac{2-a}{b}.$$

Ответ: $\frac{2-a}{b}$.

8. Определите, какое из чисел больше: $\log_3 30$ или $\log_7 320$.

Решение.

$$\log_3 30 > \log_3 27 = 3, \quad \log_7 320 < \log_7 343 = 3.$$

Ответ: $\log_3 30$.

Решите уравнения.

9. $3^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4 \cdot 3^{x+2} = 279$.

Решение.

$$3^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4 \cdot 3^{x+2} = 279 \Leftrightarrow 3^x - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 4 \cdot 9 \cdot 3^x = 279 \Leftrightarrow \\ 3^x(1 - 6 + 36) = 279 \Leftrightarrow 31 \cdot 3^x = 279 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

10. $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$.

Решение.

$$5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3 \Leftrightarrow 5^{2x}/125 - 2 \cdot 5^x/25 - 3 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 10 \cdot 5^x - 375 = 0.$$

Введя переменную $t = 5^x > 0$, получим квадратное уравнение $t^2 - 10t - 375 = 0$ с корнями $t_1 = 25$, $t_2 = -15$. Второй корень не удовлетворяет условию $t > 0$. Возвращаясь к переменной x , находим $5^x = 25 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

11. $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Решение.

$$\begin{aligned}4^x - 3^{x-1/2} &= 3^{x+1/2} - 2^{2x-1} && \Leftrightarrow && 4^x - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = 3^x \sqrt{3} - \frac{4^x}{2} \\&&& \Leftrightarrow && \frac{3}{2} \cdot 4^x = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) && \Leftrightarrow && \frac{3}{2} \cdot 4^x = 3^x \frac{3+1}{\sqrt{3}} \\&&& \Leftrightarrow && \frac{3}{2} \cdot 2^{2x} = (\sqrt{3})^{2x} \frac{4}{\sqrt{3}} && \Leftrightarrow && \frac{3\sqrt{3}}{2^3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2x} \\&&& \Leftrightarrow && \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2x} && \Rightarrow && 2x = 3 && \Rightarrow && x = 3/2.\end{aligned}$$

Ответ: 3/2.

12. $2 \cdot 81^x + 3 \cdot 16^x - 5 \cdot 36^x = 0.$

Решение.

$$\begin{aligned}2 \cdot 81^x + 3 \cdot 16^x - 5 \cdot 36^x &= 0 && \Leftrightarrow && 2 \cdot 9^{2x} + 3 \cdot 4^{2x} - 5 \cdot 9^x \cdot 4^x &&= 0 && \Leftrightarrow \\&&& && 2 + 3 \left(\frac{4}{9} \right)^{2x} - 5 \left(\frac{4}{9} \right)^x &&= 0.\end{aligned}$$

Полагая $\left(\frac{4}{9} \right)^x = t > 0$, приходим к квадратному уравнению $3t^2 - 5t + 2 = 0$ с корнями $t_1 = 1$ и $t_2 = 2/3$. Возвращаясь к переменной x , получаем:

$$\left(\frac{4}{9} \right)^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0, \quad \left(\frac{4}{9} \right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\{0; \frac{1}{2}\}.$

13. $\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81.$

Решение.

ОДЗ: $x \in [0, +\infty).$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot 3^{-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 3^4 \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} + \frac{x}{1+\sqrt{x}} - \frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})} = 4 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{x}+2x-2-\sqrt{x}-x}{2(1+\sqrt{x})} = 4 \\
\Rightarrow & \sqrt{x}-1=8 \Rightarrow \sqrt{x}=9 \Rightarrow x=81.
\end{aligned}$$

Ответ: 81.

14. $5 \cdot 2^{1/2x} - 2^{1/x} = 6.$

Решение.

ОДЗ: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$

Пусть $2^{1/2x} = t > 0$, тогда $2^{1/x} = t^2$. Квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$ имеет корни $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
2^{1/2x} = 2 & \Rightarrow \frac{1}{2x} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \\
2^{1/2x} = 3 & \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = \log_2 3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2 \log_2 3} = \frac{1}{2} \log_3 2.
\end{aligned}$$

Ответ: $\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \log_3 2\}.$

15. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{3}.$

Решение.

ОДЗ: $x \in (0, +\infty).$

$$\begin{aligned}
\log_5 x + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{3} & \Leftrightarrow \log_5 x + \log_{5^2} x = \log_{5^{-1}} 3^{1/2} \\
\Leftrightarrow \log_5 x + \frac{1}{2} \log_5 x = -\frac{1}{2} \log_5 3 & \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_5 x = -\frac{1}{2} \log_5 3 \Leftrightarrow \\
\log_5 x = -\frac{1}{3} \log_5 3 & \Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 3^{-1/3} \Rightarrow x = 3^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$

Замечание. Решение уравнения следует начинать с определения ОДЗ, учитывая, что выражение под знаком логарифма должно быть положительным, основание логарифма должно быть положительным и отличным от единицы.

$$16. \log_{1/4}(x^2 + 6x) = -2.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x^2 + 6x > 0.$$

$$\log_{1/4}(x^2 + 6x) = -2 \Leftrightarrow x^2 + 6x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 + 6x = 16 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = -8, x_2 = 2.$$

Ответ: $\{-8; 2\}$.

$$17. \log_2 \sqrt{1+x} + 3\log_2 \sqrt{x-1} = \log_2 \sqrt{x^2-1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \in (1, +\infty).$$

$$\log_2 \sqrt{1+x} + 3\log_2 \sqrt{x-1} = \log_2 \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log_2(1+x) + \frac{1}{2}\log_2(x-1)^3 = \frac{1}{2}\log_2(x^2-1) \Leftrightarrow$$

$$\log_2(1+x)(x-1)^3 = \log_2(x^2-1) \Leftrightarrow (x^2-1)(x-1)^2 = (x^2-1).$$

С учетом ОДЗ последнее уравнение равносильно уравнению $(x-1)^2 = 1$ и имеет единственное решение $x = 2$.

Ответ: 2 .

$$18. \log^2_2 x - 5 \cdot \log_2 x + 6 = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $x \in (1, +\infty)$.

Введя переменную $t = \log_2 x$, получим квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, корни которого $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$. Возвращаясь к переменной x , находим:

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x_1 = 2^2 = 4, \quad \log_2 x = 3 \Rightarrow x_2 = 2^3 = 8.$$

Ответ: $\{4; 8\}$.

19. $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x^9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, +\infty).$$

$$\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{9\log_3 x} - 4\log_9 (3x)^{1/2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$3\sqrt{\log_3 x} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \log_3 (3x) = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - (\log_3 3 + \log_3 x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - 1 - \log_3 x = 1 \Leftrightarrow \log_3 x - 3\sqrt{\log_3 x} + 2 = 0.$$

Полагая $\sqrt{\log_3 x} = t \geq 0$, приходим к квадратному уравнению $t^2 - 3t + 2 = 0$ с корнями $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\sqrt{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x_1 = 3,$$

$$\sqrt{\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Rightarrow x_2 = 3^4 = 81.$$

Ответ: $\{3; 81\}$.

20. $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1).$

Решение.

ОДЗ: $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1) \Leftrightarrow \log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2 4 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

$\Leftrightarrow$

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2(4 \cdot 3^{x-1} + 4) \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = 4 \cdot 3^{x-1} + 4 \Leftrightarrow 3^{2(x-1)} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0.$$

Вводя переменную $t = 3^{x-1} > 0$, получим квадратное уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$ с корнями $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$. Возвращаясь к переменной x , находим:

$$3^{x-1} = 1 \Rightarrow x_1 = 1;$$

$$3^{x-1} = 3 \Rightarrow x_2 = 2.$$

Ответ: $\{1; 2\}$.

21. $x^{\log_5 x - 2} = 125$.

Решение.

ОДЗ: $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$x^{\log_5 x - 2} = 125 \Leftrightarrow \log_5 x^{\log_5 x - 2} = \log_5 5^3 \Leftrightarrow$$

$$(\log_5 x - 2) \log_5 x = 3 \Leftrightarrow \log_5^2 x - 2 \log_5 x - 3 = 0.$$

Пусть $\log_5 x = t$. Квадратное уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = -1$ и $t_2 =$

3. Возвращаясь к переменной x , получим:

$$\log_5 x = -1 \Rightarrow x_1 = 5^{-1} = 1/5, \quad \log_5 x = 3 \Rightarrow x_2 = 5^3 = 125.$$

Ответ: $\{1/5; 125\}$.

22. $(\sqrt{3})^{\lg x} = 3^{\lg 2} \cdot 9^{\lg(\sqrt{x}-1)}$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty).$$

$$(\sqrt{3})^{\lg x} = 3^{\lg 2} \cdot 9^{\lg(\sqrt{x}-1)} \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2} \lg x} = 3^{\lg 2 + 2 \lg(\sqrt{x}-1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \lg x = \lg 2 + 2 \lg(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow \lg \sqrt{x} = \lg 2 + \lg(\sqrt{x}-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\lg \sqrt{x} = \lg(2 \cdot (\sqrt{x}-1)^2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \cdot (\sqrt{x}-1)^2.$$

Вводя переменную $t = \sqrt{x}$, получим:

$$t = 2(t-1)^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1/2, t_2 = 2.$$

Возвращаясь к переменной x , находим:

$$\sqrt{x} = 1/2 \Rightarrow x_1 = 1/4 - \text{не принадлежит ОДЗ};$$

$$\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x_2 = 4.$$

Ответ: 4.

23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}} = 32 \cdot 8^{\frac{y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 9^{\frac{1-y}{y}} \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}} = 32 \cdot 8^{\frac{y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 9^{\frac{1-y}{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 3^{2 \cdot (\frac{1}{y} - 1)} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5 + \frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3^{\frac{2}{y} - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x} \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{y} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x} \\ y = \frac{2}{\frac{x}{y} + 1} \end{cases}$$

Полагая $t = \frac{x}{y} \neq 0$, приводим первое уравнение к виду $2t = 5 + 3/t$, или

$2t^2 - 5t - 3 = 0$. Квадратное уравнение имеет корни $t_1 = -1/2$, $t_2 = 3$. Подставляя найденные значения во второе уравнение системы, получаем $y_1 = 4$, $y_2 = 1/2$. Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 3/2$.

Ответ: $(-2, 4)$; $(3/2, 1/2)$.

24. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{1/3}(\log_{1/2} y) = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_{1/2} y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x > 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (1, +\infty); y \in (0, 1).$$

$$\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{1/3}(\log_{1/2} y) = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(\log_2 x) - \log_3(\log_{1/2} y) = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{\log_2 x}{\log_{1/2} y} = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_2 x}{\log_{1/2} y} = 3 \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -\log_2 y^3 \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y^3 = 0 \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(xy^3) = 0 \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^3 = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 1/4, x = 64.$$

Ответ: (64, 1/4).

25. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512 \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2 \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x \in (0, +\infty); y \in (0, +\infty).$

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512 \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2^9 \\ \lg \sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 25 \\ x = 25 \\ y = 16 \end{cases}$$

Ответ: (16, 25); (25, 16).

Решите неравенства.

26. $0,3^{2x^2-3x+3} < 0,00243$.

Решение.

$$0,3^{2x^2-3x+3} < 0,00243 \Leftrightarrow 0,3^{2x^2-3x+3} < 0,3^5 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 3 > 5 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1/2) \cup (2, +\infty).$$

Ответ: $(-\infty, -1/2) \cup (2, +\infty)$.

27. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-1}{2x+1}} < \frac{9}{4}$.

Решение.

ОДЗ: $x \in (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-1}{2x+1}} < \frac{9}{4} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2x-1}{2x+1}} < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{2x-1}{2x+1} < 2 \Leftrightarrow \\ &\frac{2x-1}{2x+1} + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{6x+1}{2x+1} > 0. \end{aligned}$$

Решая неравенство методом интервалов, получим:

$$x \in (-\infty, -1/2) \cup (-1/6, +\infty).$$

Ответ: $(-\infty, -1/2) \cup (-1/6, +\infty)$.

28. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

Решение.

$$25^x < 6 \cdot 5^x - 5 \Leftrightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0.$$

Введя переменную $t = 5^x > 0$, получим квадратное неравенство $t^2 - 6t + 5 < 0$, или $(t - 5)(t - 1) < 0$, решением которого является интервал $(1, 5)$. Возвращаясь к переменной x , находим $5^0 < 5^x < 5^1 \Rightarrow x \in (0, 1)$.

Ответ: $(0, 1)$.

29. $\log_3(x-3) \leq 2$.

Решение.

$$\log_3(x-3) \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 \leq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3, 12].$$

Ответ: $(3, 12]$.

30. $\log_{1/3} \frac{3x-1}{x+2} < 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \log_{1/3} \frac{3x-1}{x+2} < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{x+2} > 0 \\ x \neq -2 \\ \frac{3x-1}{x+2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{3x-1}{x+2} > 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{3x-1}{x+2} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{2x-3}{x+2} > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Применяя метод интервалов, получаем:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (3/2, +\infty).$$

Ответ: $(-\infty, -2) \cup (3/2, +\infty)$.

$$31. \log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} < 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 0 \\ x - 3 \neq 0 \\ \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 0 \\ \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 0 \\ x - 3 \neq 0 \\ \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 1 \\ \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ \frac{x^2 - 2x}{x - 3} > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ \frac{(x - 6)(x - 4)}{x - 3} > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Применяя метод интервалов, получаем:

$$X \in (3, 4) \cup (6, +\infty).$$

Ответ: $(3, 4) \cup (6, +\infty)$.

$$32. \log_3 \log_{1/2} \log_4 (x - 1) \geq 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_3 \log_{1/2} \log_4 (x - 1) \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ \log_4 (x - 1) > 0 \\ \log_{1/2} \log_4 (x - 1) > 0 \\ \log_{1/2} \log_4 (x - 1) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 > 1 \\ \log_4 (x - 1) < 1 \\ \log_4 (x - 1) \leq 1/2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 1 \\ x - 1 < 4 \\ x - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (2, 3]. \end{aligned}$$

Ответ: $(2, 3]$.

$$33. \frac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$\frac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x} - \frac{1}{2} \leq 0 \\ 1 + \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1 - 3\log_2 x}{2(1 + \log_2 x)} \leq 0 \\ x \neq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1/2 \\ \begin{cases} (\log_2 x < -1) \\ (\log_2 x \geq 1/3) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1/2 \\ \begin{cases} (x < 1/2) \\ (x \geq \sqrt[3]{2}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (0, 1/2) \cup [\sqrt[3]{2}, +\infty).$$

Ответ: $(0, 1/2) \cup [\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

34. $0,3^{\log_{1/3} \log_2 \left(\frac{3x+6}{x^2+2} \right)} > 1.$

Решение.

$$0,3^{\log_{1/3} \log_2 \left(\frac{3x+6}{x^2+2} \right)} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+6}{x^2+2} > 0 \\ \log_2 \left(\frac{3x+6}{x^2+2} \right) > 0 \\ \log_{1/3} \log_2 \left(\frac{3x+6}{x^2+2} \right) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+6}{x^2+2} > 0 \\ \frac{3x+6}{x^2+2} > 1 \\ \log_2 \left(\frac{3x+6}{x^2+2} \right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+6}{x^2+2} > 1 \\ \frac{3x+6}{x^2+2} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+6}{x^2+2} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+6 > 2x^2+4 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x^2-3x-2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1/2)(x-2) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1/2, 2).$$

Ответ: $(-1/2, 2)$.

$$35. \quad 0,4^{\log_3(3/x) \cdot \log_3(3x)} > 6,25^{\log_3 x^2 + 2}.$$

Решение.

$$0,4^{\log_3(3/x) \cdot \log_3(3x)} > 6,25^{\log_3 x^2 + 2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_3(3/x) \cdot \log_3(3x)} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2 \cdot (\log_3 x^2 + 2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3(3/x) \cdot \log_3 3x < -2 \cdot (\log_3 x^2 + 2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ (\log_3 3 - \log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) < -4 \log_3 x - 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log_3^2 x < -4 \log_3 x - 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \log_3^2 x - 4 \log_3 x - 5 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} \log_3 x < -1 \\ \log_3 x > 5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x < 1/3 \\ x > 3^5 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(0, 1/3) \cup (243, +\infty)$.

36. $\log_{1/x}(5x/2 - 1) > -2$.

Решение.

$$\log_{1/x}(5x/2 - 1) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x/2 - 1 > 0 \\ x \neq 1 \\ 0 < 1/x < 1 \\ 5x/2 - 1 \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2/5 \\ x > 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x/2 - 1 > 0 \\ x \neq 1 \\ 1/x > 1 \\ 5x/2 - 1 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2/5 \\ x < 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ (x-2)(x-1/2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1/2, 1) \cup [2, +\infty).$$

$$\begin{cases} 2/5 < x < 1 \\ (x-2)(x-1/2) \leq 0 \end{cases}$$

Ответ: $[1/2, 1) \cup [2, +\infty)$.

37. $\log_x(3x + 1) > \log_x(x + 2)$.

Решение.

$$\log_x(3x + 1) > \log_x(x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ 0 < x < 1 \\ 3x+1 < x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1/3 \\ x > -2 \\ 0 < x < 1 \\ 2x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ x > 1 \\ 3x+1 < x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1/3 \\ x > -2 \\ x > 1 \\ 2x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < 1/2 \\ x > 1 \\ x > 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1/2 \\ x > 1 \end{cases}$$

Ответ: $(0, 1/2) \cup (1, +\infty)$.

38. $\sqrt{7-x} \cdot \log_{1/2}(x^2 - 10x + 9) \leq 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{7-x} \cdot \log_{1/2}(x^2 - 10x + 9) \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x > 0 \\ x^2 - 10x + 9 > 0 \\ x^2 - 10x + 9 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ (x-1)(x-9) > 0 \\ x^2 - 10x + 8 < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ (x-1)(x-9) > 0 \\ (x-5-\sqrt{17})(x-5+\sqrt{17}) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (5-\sqrt{17}, 1) \end{aligned}$$

и число целых решений равно 0.

Ответ: 0.

7.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите $\log_{\sqrt{3}} 16$, $\log_{27} 2$, $\log_9 64$, если $\log_3 4 = 1,26$.

Ответ: 5,04; 0,21; 1,89.

2. Найдите x , если $\lg(\lg x) = \lg(2 \cdot \lg a + \frac{1}{2} \lg b)$.

Ответ: $a^2 \sqrt{b}$.

Вычислите.

3. $\log_3 \log_a \sqrt[3]{3\sqrt{a}}$.

Ответ: -2.

4. $4^{\frac{1}{4} \log_2 3 + 2 \cdot \log_{16} 4}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

5. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$. 6. Найдите $\log_{\sqrt{ab}}(a^3 \sqrt{b})$, если $\log_b a = 1$.

Ответ: 24.

Ответ: 3,5.

7. Найдите $\log_{175} 56$, если $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

Ответ: $\frac{3-2a}{2b+a}$.

8. Какое из чисел меньше: $\log_2 10$ или $\log_5 90$.

Ответ: $\log_5 90$.

Решите уравнения.

9. $5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} + 7 \cdot 5^x = 47$.

Ответ: 0.

10. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$.

Ответ: 0.

11. $2^{x-2} + 7 = 2^{5-x}$.

Ответ: 2.

12. $6 + 7^{2-x} = 7^{x-1}$.

Ответ: 2.

13. $49^x + 2 \cdot 9^x = 3 \cdot 21^x$.

Ответ: 0, $\log_{7/3} 2$.

14. $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

Ответ: 6.

15. $\sqrt{2} \cdot 0,5^{-\frac{4}{2\sqrt{x}+5}} - 16^{\frac{1}{2\sqrt{x}+1}} = 0$.

Ответ: 9/4.

16. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

Ответ: {3; 11}.

17. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 8x) = -2$.

Ответ: {-9; 1}.

18. $\frac{\frac{3}{2} \lg 3 + \lg(x+1)}{\lg(3x-1) + \lg(x+1) + \lg 6} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\emptyset$.

20. $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0,5 = 0$.

$$19. \lg(x^2 + 1) = \frac{2}{\lg(x^2 + 1)} - 1.$$

Ответ: $-5/4$.

Ответ: $\{-3; 3\}$.

$$22. x^{1+\lg x} = 0,001^{-2/3}.$$

Ответ: $\{1/100; 10\}$.

$$21. 3 \cdot \log_5 2 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$$

Ответ: 2 .

$$23. (0,4)^{\lg^2 x - 1} = (6,25)^{-2 + \lg x^2}.$$

Ответ: $\{10^{-5}; 10\}$.

Решите системы уравнений.

$$24. \begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $(1/6, 1/4); (1/4, 1/6)$.

$$25. \begin{cases} \log_2 x + 5^{\log_5 y} = 7 \\ x^y = 2^{10} \end{cases}$$

Ответ: $(32, 2); (4, 5)$.

$$26. \begin{cases} x^{\lg y} = 100 \\ \log_y x = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(100, 10); (1/100, 1/10)$.

$$27. \begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32 \\ \log_3 (x - y)^2 - 2 \log_3 2 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(3, 1); (1/3, 7/3)$.

Решите неравенства.

$$28. 0,2^{4x^2 - 3x + 3} \geq 0,0016.$$

Ответ: $[-1/4, 1]$.

$$29. 5^{2x+1} > 5^x + 4.$$

Ответ: $(0, +\infty)$.

$$30. \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3x-1}{x+2}} \leq \frac{25}{9}.$$

Ответ: $(-\infty, -2) \cup [-3/5, +\infty)$.

$$31. \log_2 (x-2) \leq 3.$$

Ответ: $(2, 10]$.

$$32. \log_{0,3} (3x-2) > \log_{0,3} (x^2+4).$$

Ответ: $(2/3, +\infty)$.

$$33. \log_2 (1 + \log_{1/9} x - \log_9 x) < 1.$$

Ответ: $(1/3, 3)$.

$$34. \log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0.$$

Ответ: $(-4, -3) \cup (8, +\infty)$.

$$36. \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{1/4}(x^2 - 5x + 8)} \leq 2,5.$$

Ответ: $[1, 4]$.

$$38. \log_x(5x + 2) < \log_x(x + 2).$$

Ответ: $(0, 1)$.

$$40. \sqrt{x-1} \cdot \log_2(x^2 - 4x + 3) \leq 0.$$

Ответ: $(3, 2 + \sqrt{2}]$.

$$35. \log_2 \log_{1/3} \log_5 x > 0.$$

Ответ: $(1, 5^{1/3})$.

$$37. 3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2.$$

Ответ: $(1/100, +\infty)$.

$$39. \log_{x+1}(2 - x) < 1.$$

Ответ: $(-1, 0) \cup (1/2, 3)$.

7.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ

Вычисление логарифмов

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Вычислите $\log_3 3^3$
2	Вычислите $\log_3 9^2$
3	Вычислите $\log_{1/3} 3$
4	Вычислите $\log_{27} 3$
5	Вычислите $\log_{27} 81$
6	Вычислите $\log_{\sqrt{3}} 9$
7	Вычислите $\log_6 3 + \log_6 12$
8	Вычислите $\log_6 12 - \log_6 2$
9	Вычислите $\log_3 \log_3 27$
10	Вычислите $\log_6 (\log_{\sqrt{3}} 27 + \log_{\sqrt[5]{3}} 3^6)$

Вычисление логарифмов**Вариант 2**

№ задания	Задание
1	Вычислите $\log_4 4^2$
2	Вычислите $\log_4 16^3$
3	Вычислите $\log_{1/4} 4$
4	Вычислите $\log_{16} 4$
5	Вычислите $\log_{16} 64$
6	Вычислите $\log_{\sqrt{4}} 16$
7	Вычислите $\log_4 2 + \log_4 8$
8	Вычислите $\log_4 48 - \log_4 3$
9	Вычислите $\log_4 \log_4 256$
10	Вычислите $\log_2 (\log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2^3}} 64)$

Вычисление логарифмов

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Вычислите $\log_5 5^2$
2	Вычислите $\log_5 25^3$
3	Вычислите $\log_{1/5} 5$
4	Вычислите $\log_{25} 5$
5	Вычислите $\log_{25} 125$
6	Вычислите $\log_{\sqrt{5}} 25$
7	Вычислите $\log_5 4 + \log_5 31,25$
8	Вычислите $\log_5 20 - \log_5 4$
9	Вычислите $\log_5 \log_3 \sqrt[5]{3}$
10	Вычислите $\log_5 (\log_{\sqrt{2}} 2^5 + \log_{\sqrt[3]{2}} 2^5)$

Вычисление логарифмов

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Вычислите $\log_{36} 6$
2	Вычислите $\log_4 \frac{1}{32}$
3	Вычислите $\log_{1/3} 3\sqrt{3}$
4	Вычислите $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$
5	Вычислите $\log_{27} 729$
6	Вычислите $\log_3^4 \frac{1}{9}$
7	Вычислите $\log_6 34 - \log_6 17 + \log_6 18$
8	Вычислите $\log_3 21 + \log_3 2 - \log_3 14$
9	Вычислите $\log_{16}^3 \log_3 81$
10	Вычислите $\log_3 (\log_{\sqrt[3]{5}} 25 + \log_{\sqrt[4]{2}} 8)$

Вычисление логарифмов**Ответы**

№ варианта № задания	1	2	3	4
	1	2	3	4
1	3	2	2	0,5
2	4	6	6	−2,5
3	−1	−1	−1	−1,5
4	1/3	1/2	1/2	−2
5	4/3	3/2	3/2	2
6	4	4	4	16
7	2	2	3	2
8	1	2	1	1
9	1	1	−1	0,125
10	2	3	2	3

Преобразование и вычисление логарифмических выражений

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Вычислите $\log_2 81 \cdot \log_9 \sqrt{2}$
2	Вычислите $3^{\log_5 4 \cdot \log_{16} 25}$
3	Вычислите $\log_7 (\log_4 9 \cdot \log_{27} 8)$
4	Вычислите $2^{\log_4 3^2} - 3^{2 + \log_{3^2} 5^2}$
5	Вычислите $3^{\log_{12} 7} \cdot 4^{\log_{12} 7}$
6	Вычислите $\log_3 16 \cdot \log_4 27 + 4^{\log_{20} 2} \cdot 5^{\log_{20} 2}$
7	Вычислите $(3^{\log_9 16} - 1)^{\log_3 5}$
8	Вычислите $5^{\frac{\log_9 6}{\log_3 5}}$
9	Вычислите $\log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9$
10	Вычислите $\log_3 (\sqrt[3]{4} \cdot 9)$

Преобразование и вычисление логарифмических выражений

Вариант 2

№ задания	Задание
1	Вычислите $\log_3 16 \cdot \log_4 27$
2	Вычислите $4^{\log_8 9 \cdot \log_{16} 8}$
3	Вычислите $\log_7 (\log_2 81 \cdot \log_9 \sqrt{2})$
4	Вычислите $3^{\log_9 2^4} + 4^{2 + \log_{64} 3^6}$
5	Вычислите $2^{\log_6 5} \cdot 3^{\log_6 5}$
6	Вычислите $3^{\log_7 16} \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^{\log_7 16} - \log_{25} 4 \cdot \log_8 125$
7	Вычислите $(5^{\log_{25} 16} - 2)^{\log_2 7}$
8	Вычислите $7^{\frac{\log_2 5}{\log_4 7}}$
9	Вычислите $\log_7 8 \cdot \log_8 6 \cdot \log_6 7$
10	Вычислите $\log_4 (16\sqrt{3})$

Преобразование и вычисление логарифмических выражений

Вариант 3

№ задания	Задание	Ответ
1	Вычислите $\log_{25} 4 \cdot \log_8 125$	
2	Вычислите $2^{\log_3 7 \cdot \log_{49} 27}$	
3	Вычислите $\log_5 (\log_4 9 \cdot \log_{27} 8)$	
4	Вычислите $5^{\log_{25} 4^2} - 3^{1+\log_9 4^2}$	
5	Вычислите $7^{\log_{21} 3} \cdot 3^{\log_{21} 3}$	
6	Вычислите $\log_4 27 \cdot \log_9 4 + 2^{\log_6 2} \cdot 3^{\log_6 2}$	
7	Вычислите $(3^{\log_9 16} - 2)^{\log_2 3}$	
8	Вычислите $13^{\frac{\log_{125} 8}{\log_{25} 13}}$	
9	Вычислите $\log_{11} 10 \cdot \log_{12} 11 \cdot \log_{13} 12$	
10	Вычислите $\log_2 \sqrt{20}$	

Преобразование и вычисление логарифмических выражений

Вариант 4

№ задания	Задание
1	Вычислите $\log_9 8 \cdot \log_4 81$
2	Вычислите $32^{\log_4 3 - 0,1 \log_2 3}$
3	Вычислите $\log_2 (\log_{\sqrt{2}} 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2)$
4	Вычислите $10^{2 - \log 2} - 25^{\log_5 4}$
5	Вычислите $5^{\log_{20} 3} \cdot 4^{\log_{20} 3}$
6	Вычислите $\log_4 9 \cdot \log_3 16 + 4^{\log_8 5} \cdot 2^{\log_8 5}$
7	Вычислите $\frac{3}{7} (\log_2 16 + 27^{\log_3 2})^{\log_{12} 49}$
8	Вычислите $2^{\frac{4}{\log_{\sqrt[4]{3}} 2}}$
9	Вычислите $\log_{11} 12 \cdot \log_{12} 13 \cdot \log_{13} 14$
10	Вычислите $4 \log_{\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{a}}{b} \right) + 3 \log_{\sqrt{ab}} b^2 - \frac{2}{\log_b a}$ при $\log_a b = 6$

Преобразование и вычисление логарифмических выражений Ответы

№ варианта	1	2	3	4
№ задания				
1	1	6	1	3
2	3	3	$2\sqrt{2}$	9
3	0	0	0	3
4	-42	148	-8	34
5	7	5	3	3
6	8	15	3,5	9
7	5	7	3	21
8	$\sqrt{6}$	25	4	3
9	$\log 6$	1	$\log_{13} 10$	$\log_{11} 14$
10	$\frac{2}{3}\log_3 2 + 2$	$2 + \frac{1}{2}\log_4 3$	$1 + \frac{1}{2}\log_2 5$	-8

Логарифмические уравнения
Вариант 1

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\log_4(x-1) = 2$
2	Решите уравнение $\log_2(x+3) = \log_2(x-1) + 1$
3	Решите уравнение $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 3x) = -1$
4	Решите уравнение $\log_3 x + \log_{27} x = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{5}$
5	Решите уравнение $3\log_3(x-1) + 2\log_3(x+1) = 2\log_3(x^2 - 1)$
6	Решите уравнение $\log_3^2 x - 3\log_3 x - \frac{7}{4} = 0$
7	Решите уравнение $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$
8	Решите уравнение $2\log_3 \sqrt{3x} = \sqrt{\frac{1}{\log_x 3}} + 3$
9	Решите уравнение $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 5x) - \log_{\frac{1}{5}} \frac{256(x-5)}{x} = 0$
10	Решите уравнение $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 5 = 3^{\log_3 9}$

Логарифмические уравнения
Вариант 2

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\log_3(x+2) = 2$
2	Решите уравнение $\log_2(x-1) - \log_2(x-2) = 1$
3	Решите уравнение $\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 4x) = 2$
4	Решите уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{3}$
5	Решите уравнение $4\log_2(x-1) + 3\log_2(x+1) = 3\log_2(x^2 - 1)$
6	Решите уравнение $\log_2^2 x - 4\log_2 x - 5 = 0$
7	Решите уравнение $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$
8	Решите уравнение $2\log_2 \sqrt{\frac{x}{4}} = \sqrt{\frac{1}{\log_x 2} - 2}$
9	Решите уравнение $\log_{0,24}(x^2 - 18x) + \log_{0,24} \frac{(x-8)}{256x} = 0$
10	Решите уравнение $\lg x - 2\lg 100 + 4(\lg x)^{-1} = 0$

Логарифмические уравнения
Вариант 3

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 2$
2	Решите уравнение $\log_3 \frac{2x-1}{\frac{3}{4}x+2} = 1$
3	Решите уравнение $\log_5(4x^2 - 3x - 0,8) = \log_2 0,5$
4	Решите уравнение $\log_{x-2}(2x^2 - 13x + 18) = 1$
5	Решите уравнение $\log_9(x+1) + \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \log_{\frac{1}{9}} 27$
6	Решите уравнение $\log_2^2 x + 3 = 2 \log_2 x^2$
7	Решите уравнение $\log_3 \log_5 \log_2 x = 0$
8	Решите уравнение $\log_4 x + \log_x \frac{1}{16} = 1$
9	Решите уравнение $\log_{27}(x^2 - 3x) + \log_{27} \frac{(x-3)}{x} = 0$
10	Решите уравнение $\frac{2 \log_2^2 x - 1}{\log_2^2 x + 2 \log_2 x + 2} = 1$

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\log_{0,2}(x+3) = -1$
2	Решите уравнение $\log_2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} = -1$
3	Решите уравнение $\log_4(3x^2 - 3x - 5,75) = \log_{0,5} 2$
4	Решите уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}(x^3 - 2x^2 - x + 2) = -6$
5	Решите уравнение $0,5 \log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2 - \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{4}} \left(2 - \frac{x}{4}\right) - 1$
6	Решите уравнение $3 \lg x^2 - \lg^2 x = 9$
7	Решите уравнение $\log_3 \log_2 \log_5 x = 0$
8	Решите уравнение $1 + \log_2 32 + \log_{0,5} x - 9 \log_x 2 = 0$
9	Решите уравнение $\log_2(2x - x^2) + \log_2 \frac{x}{2-x} = 0$
10	Решите уравнение $\log_2^2 x - \log_2 x^3 = 4$

Логарифмические уравнения

Ответы

№ варианта	1	2	3	4
№ задания				
1	17	7	1	2
2	5	3	2	5
3	4; -1	5; -1	-0,25; 1	-1; 2
4	$\sqrt{5}$	3	5	3
5	2	2	2	2
6	$\frac{1}{\sqrt{3}}; 27\sqrt{3}$	$2^5; \frac{1}{2}$	2; 8	1000
7	8	64	2^5	5^2
8	3	8; 4	0,25; 16	8
9	-16; 16	34	4	1
10	0,5; 16	100	0,5; 8	0,5; 16

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-13}$
2	Решите уравнение $\sqrt[4]{9^{x+5}} = \frac{27}{\sqrt[5]{3}}$
3	Решите уравнение $7^x + 5 \cdot 7^{x-2} = 378$
4	Решите уравнение $5^{-x+1} = 1625 \cdot 13^{-x-3}$
5	Решите уравнение $100^x - 70 \cdot 10^{x-1} - 30 = 0$
6	Решите уравнение $3 \cdot 5^{-(2x+2)} - 2^{2-2x} + 5^{-(2x+1)} - 2^{-2x} = 0$
7	Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} + 2^{x-3} = 80 + \sqrt{4^{x-4}}$
8	Решите уравнение $\sqrt{3^x - 5} = 11 - 3^x$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $(0,8)^{x+2} = (1,25)^{-4}$
2	Решите уравнение $\sqrt[5]{4^{x+4}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$
3	Решите уравнение $4^{x-1} + 114^{x-2} = 15 \cdot 2^{-4}$
4	Решите уравнение $35 \cdot 7^{2x-4} = 25^{x-1}$
5	Решите уравнение $9^{x+1} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$
6	Решите уравнение $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} - 7^{x-2} - 2 \cdot 7^{x-3} = 0$
7	Решите уравнение $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-4x} + 7^{4x} + 49^{2x-1} - 399 = 0$
8	Решите уравнение $\sqrt{6^{x+2}} - 2 = 8 - 36 \cdot 6^x$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \frac{1}{2} \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\left(\frac{49}{16}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^9$
2	Решите уравнение $\sqrt[3]{25^{2x-1}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$
3	Решите уравнение $7 \cdot 6^x - 6^{x+1} = 6^{-2}$
4	Решите уравнение $3^{-2x+1} = 1944 \cdot 2^{2x+1}$
5	Решите уравнение $4^x - 30 \cdot 2^{x-1} - 16 = 0$
6	Решите уравнение $2 \cdot 2^{3x} + 3^{3x-2} + 4 \cdot 2^{3x-2} - 3^{3x} = 0$
7	Решите уравнение $6^{2x+1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{1-2x} - 36^{x-1} = 1326$
8	Решите уравнение $\sqrt[3]{4^x - 1} = 3 - 4^{\frac{3}{x}}$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 3^y = \frac{73}{9} \\ 2^x \cdot 3^y = \frac{8}{9} \end{cases}$

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\left(\frac{16}{9}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$
2	Решите уравнение $\sqrt{3^{2x+1}} = \frac{9}{\sqrt[5]{3}}$
3	Решите уравнение $5^x - 9 \cdot 5^{x-3} = 580$
4	Решите уравнение $\sqrt[3]{2^{2x+8}} = 152 \cdot 19^{2x-2}$
5	Решите уравнение $25^x - 120 \cdot 5^{x-1} - 25 = 0$
6	Решите уравнение $5 \cdot 7^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+1} - 2 \cdot 7^x = 0$
7	Решите уравнение $3^{x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} - \sqrt{9^{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{9^{3-x}}} = 258$
8	Решите уравнение $\sqrt{2^x - 7} = 9 - 2^x$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = \frac{4}{9} \\ x + y = 4 \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{0,5y} = 25 \end{cases}$

Показательные уравнения и системы				Ответы
№ варианта	1	2	3	4
№ задания				
1	6,5	2	-5,5	-3
2	0,6	2,25	0,875	1,3
3	3	0	-2	4
4	-2	1,5	-2	0,5
5	1	-2	4	2
6	-1,5	4	1	2
7	8	0,75	1,5	4
8	2	-1	6	3
9	2; 5	-0,5; 2	1; 2	2; 2
10	2; 2	3; 2	3; -2	3; 2

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\log_{2x+1}(5+8x-4x^2) + \log_{5-2x}(1+4x+4x^2) = 4$
2	Решите уравнение $5^{\log_4(x+3) - \log_4(x-1)} = (0,2)^{-2 + \log_4 8}$
3	Решите уравнение $\log_3 x + 16 \log_x 3 = 5 - \lg 0,001$
4	Решите уравнение $\frac{4}{3} \log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -6 \cdot \log_3^2 \frac{1}{x}$
5	Решите уравнение $100^{\lg^2 x} - 9x^{\lg x} = 10$
6	Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\log_5 \log_{1/4} x}{\log_{1/25} 3}} = \log_{1/4}^2 5$
7	Решите уравнение $ x ^{\lg x } = 10^4$
8	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3(2/y) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 5 \\ \log_3 x - \log_3 y = 7 \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_4 x = y - 1 \\ x^{y/6} = 4 \end{cases}$

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\frac{1 + \log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} = \log_3(2x-3)$
2	Решите уравнение $3^{\frac{1}{\log_4 9}} = x^{0,5 \log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}$
3	Решите уравнение $\log_4(x+1) + 8 \log_{x+1} 2 - \log_2 8 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 3$
4	Решите уравнение $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 1) = \lg 6 + \lg\left(2^{x-2} + \frac{5}{3}\right)$
5	Решите уравнение $4^{\log_4^2(x+2)} + 2(x+2)^{\log_4 \sqrt{x+2}} = 8$
6	Решите уравнение $6^{\frac{\log_2 \log_8 x}{\log_{1/2} 6}} = \log_6 8$
7	Решите уравнение $ 2x+1 ^{\log_2 2x+1 } = 16$
8	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ 2 \lg x - \lg y + \lg 2 = 0 \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} x^y = 3 \\ \log_3 x - 2 + y = 0 \end{cases}$

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\log_x(x+2) + 2\log_{x+2}x = 3$
2	Решите уравнение $\lg \sqrt{2^{x(13-x)}} + 11 \cdot \lg 5 = 11$
3	Решите уравнение $16\log_{1-3x}2 + \log_2(1-3x) + \log_3\frac{1}{27} = 5$
4	Решите уравнение $2 \cdot \lg 2 + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = 2 + \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$
5	Решите уравнение $5^{2\log_5^2 x} - 4x^{\log_5 x} = 5$
6	Решите уравнение $5^{\frac{\log_{1/3} \log_3 x}{\log_3 5}} = \log_5 \frac{1}{3}$
7	Решите уравнение $\left \frac{x}{5} + 0,2 \right ^{\log_5 \left \frac{x+1}{5} \right } = 625$
8	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x + \log_2(y-1) = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 2 \\ \log_2 x - \log_2 y = 4 \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} y^x = 9 \\ x - \log_3 y = 1 \end{cases}$

№ задания	Задание
1	Решите уравнение $\log_x 4x = \sqrt{\log_x 4x^3}$
2	Решите уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{10x}} = -\log_x 10$
3	Решите уравнение $2\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_5 x - 4\log_x 5 = 0$
4	Решите уравнение $\sqrt{2 - \log_x 4} \cdot \log_2 x = -2\sqrt{3}$
5	Решите уравнение $9 \cdot 10^{\frac{1}{\log_x^2 10}} + x^{2\lg x} - 190 = 0$
6	Решите уравнение $3^{\frac{\log_{1/\sqrt{2}} \log_{1/5} x}{\log_2 3}} = \frac{1}{(\log_{1/5} 25)^2}$
7	Решите уравнение $ 3x + 2 ^{\log_{\sqrt{2}} 3x+2 } = 4$
8	Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 \left(\frac{x}{3} \right) + \log_2 y = 2 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
9	Решите систему уравнений $\begin{cases} \lg x (\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$
10	Решите систему уравнений $\begin{cases} x^y = 10x \\ y + \lg x = 3 \end{cases}$

Логарифмические уравнения и системы

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	0,5; 1	4	2	4
2	5	2	2; 11	0,01
3	81	15	−5	25
4	1,44; 1,5	4	9	0,25
5	0,1; 10	−1,75; 2	0,2; 5	0,1; 10
6	0,2	6	0	0,04
7	$\pm 0,1$; ± 100	$-0,375$; 1,5; $-2,5$; $-0,625$	-126 ; 124; $-0,8$; $-1,2$	$-4/3$; 0; $-5/6$; $-1/2$
8	1; 3	2; 8	2; 5	3; 4
9	3^6 ; $1/3$	2; 8	16; 1	100; 0,1; $1/\sqrt{10}$; $1/1000\sqrt{10}$
10	16; 3; $1/64$; -2	3; 1	-1 ; $1/9$ 2; 3	10; 2

Показательные неравенства

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства $2^{-x} < \sqrt{2}$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $3^{2x} < \sqrt[3]{3}$
3	Найдите наибольшее целое решение неравенства $3 \cdot 5^{x+1} + 6 \cdot 5^{-(x+1)} < \frac{81}{5^{x+1}}$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $2^{2x} - 15 \cdot 11^x < 11^x - 15 \cdot 2^{2x+3}$
5	Решите неравенство $3^x(3^x + 3^{1-x} - 4) < 0$
6	Решите неравенство $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} + 1 < 0$
7	Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$
8	Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$
9	Решите неравенство $\frac{6^{\sqrt{x}}}{x+1} > 6^{\sqrt{x}-1}$
10	Решите неравенство $3^{\sqrt{x}} - 2 < 3^{1-\sqrt{x}}$

Показательные неравенства

Вариант 2

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства $4^{\frac{x}{2}} < 8$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $4^{\frac{x}{3}} < 16$
3	Найдите наибольшее целое решение неравенства $4 \cdot 3^{x+4} + 19 \cdot 3^{-(x+4)} < \frac{31}{3^{x+4}}$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $6 \cdot 5^x - 6^x < 4 \cdot 6^{x+1} - 6 \cdot 5^{x+1}$
5	Решите неравенство $0,1^{x+1}(0,1^x + 0,1^{-x-1} - 11) < 0$
6	Решите неравенство $7^x - 8 \cdot 7^{\frac{x}{2}} + 7 < 0$
7	Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$
8	Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x}} > \sqrt{27}$
9	Решите неравенство $\frac{5^{\sqrt{x}}}{x} > 5^{\sqrt{x}+2}$
10	Решите неравенство $3^{\sqrt{x-1}+1} - 8 < 3^{1-\sqrt{x-1}}$

Показательные неравенства

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства $10^{2x/7} > 0,1$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $5^{x/4} < 25$
3	Найдите наибольшее целое решение неравенства $2 \cdot 3^x + \frac{7}{3^x} < 61 \cdot 3^{-x}$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $3 \cdot 5^{2x} - 15 \cdot 2^{2x+1} + 5^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} > 0$
5	Решите неравенство $6^x \left(\left(\frac{1}{6} \right)^{-x} + 6^{2-x} - 37 \right) \leq 0$
6	Решите неравенство $2^{2x+3} + 2 < 2^{x+4} + 2^x$
7	Решите неравенство $0,8^{\frac{x(x-3)}{2}} > 0,64$
8	Решите неравенство $\left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{x-2}{3-3x}} > \frac{9}{4}$
9	Решите неравенство $\frac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3} > 3^{\sqrt{x-3}-3}$
10	Решите неравенство $2^{\sqrt{x-3}+1} - 6 < 2^{3-\sqrt{x-3}}$

Показательные неравенства

Вариант 4

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства $2^{3x/2} > 8$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $9^{-2x/7} > \frac{1}{3}$
3	Найдите наибольшее целое решение неравенства $5 \cdot 4^{x+2} - \frac{80}{4^{x+2}} < 0$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $2 \cdot 3^{x+1} - 9 \cdot 2^{x+1} > 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x$
5	Решите неравенство $3^x(3^x + 3^{3-x} - 28) < 0$
6	Решите неравенство $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} < -3$
7	Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+16}$
8	Решите неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$
9	Решите неравенство $\frac{5^{\sqrt{x-1}}}{5x} > 5^{\sqrt{x-1}-2}$
10	Решите неравенство $2^{\sqrt{x-1,5}} + 2^{3-\sqrt{x-1,5}} < 6$

Показательные неравенства				Ответы
№ варианта	1	2	3	4
№ задания				
1	0	-2	-3	3
2	0	5	7	1
3	-1	-4	1	-2
4	3	3	2	4
5	(0; 1)	(-1; 0)	[0; 2]	(0; 3)
6	(0; 1)	(0; 2)	(-3; 1)	(0; 0,25)
7	(-8; 4)	(0; 0,5)	(-1; 4)	(-4; 8)
8	(1; 4)	(0; 0,4)	(0,8; 1)	(-4; 2)
9	[0; 5)	(0; 0,04)	(0; 0,4)	[1; 5)
10	[0; 1)	[1; 2)	[3; 7)	(2,5; 5,5)

Логарифмические неравенства**Вариант 1**

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства $\lg 3^{x-1} - \lg 3^{2x+4} < \lg 3$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{3,1}(2x-8) - \log_{3,1} 6 < 0$
3	Найдите целые решения неравенства $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $2x \cdot \log_{1/2} 5 - \log_{1/2} 5 < 0$
5	Решите неравенство $\log_{1/5}(x-5) > -2$
6	Решите неравенство $\log_{1/\sqrt{3}}(12-x^2) < -2$
7	Решите неравенство $5^{\log_5(x-7)} < 4$
8	Решите неравенство $\log_{1/\sqrt{2}}(x-1) + \log_2(x-1) > -2$
9	Решите неравенство $\log_{1/3} \log_3(x-1) > 0$
10	Решите неравенство $\log_{\log_3 2}(2x-3) > 0$

Логарифмические неравенства**Вариант 2**

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства

	$\lg 8 + \lg 20 < \lg 5 + \lg 2^{2x-5}$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_2 \left(4 - \frac{x}{2} \right) - \log_2 8 < 0$
3	Найдите целые решения неравенства $\log_{0,7}(x-8) + \log_{0,7} 13 > \log_{0,7} 39$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $4x \cdot \log_{0,6} 2 + \log_{0,6} 2 < 0$
5	Решите неравенство $\log_{1/4}(x-3) > 1,5$
6	Решите неравенство $\log_{1/2}(3x - x^2) < -1$
7	Решите неравенство $26^{\log_{26}(x+1)} < 11$
8	Решите неравенство $\log_{1/2}(x+1) + 2 \log_2(x+1) < 2$
9	Решите неравенство $\log_{1/4} \log_2(x-5) > 0$
10	Решите неравенство $\frac{\log_4(x-1,3)}{\log_4 \log_4 2,75} > 0$

Логарифмические неравенства
Вариант 3

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства $\lg 24 + \lg 4 < \lg 6 + \lg 4^{2x+8}$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{1,4}(1 - 3x) - \log_{1,4} 3 < 0$
3	Найдите целые решения неравенства $\log_{6/7}(5x + 1) - \log_{6/7} 6 > \log_{6/7} 8 - \log_{6/7} 3$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $(2x - 5) \cdot \log_{0,3} 5 < 9 \log_{0,3} 5$
5	Решите неравенство $\log_{1/2}(x - 5) > -2$
6	Решите неравенство $\log_{1/4}(5x - x^2) < -1$
7	Решите неравенство $7^{\log_7(x+5)} < 2$
8	Решите неравенство $3\log_3 x + \log_{1/\sqrt{3}} x < 1$
9	Решите неравенство $\log_{1/27} \log_8(x + 3) > 0$
10	Решите неравенство $\frac{\log_{1,5}(2x - 5)}{\log_{1,5} \log_{1,5} 4,5} < 0$

Логарифмические неравенства
Вариант 4

№ задания	Задание
1	Найдите наименьшее целое решение неравенства $\lg 18 + \lg 16 < \lg(5^x + 7) + \lg 9$
2	Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_3(4x + 2) - \log_3 10 < 0$
3	Найдите целые решения неравенства $\log_{0,5}(2x + 8) + \log_{0,5} 8 > \log_{0,5} 12 + 2 \log_{0,5} 2$
4	Найдите наименьшее целое решение неравенства $(3x - 9) \cdot \log_{1/5} 7 - 6 \log_{1/5} 7 < 0$
5	Решите неравенство $\log_{1/8}(x - 7) > -\frac{2}{3}$
6	Решите неравенство $\log_5(3x - 2x^2) > 0$
7	Решите неравенство $5^{\log_5(x-4)} < 3$
8	Решите неравенство $\log_4(x - 3) + \log_2(x - 3) < \frac{3}{2}$
9	Решите неравенство $\log_2 \log_{1/\sqrt{2}}(x - 1) > 1$
10	Решите неравенство $\frac{\log_3\left(\frac{x}{2} + 2\right)}{\log_3 \log_{1/3} \frac{1}{7}} < 0$

Логарифмические неравенства

Ответы

№ варианта	1	2	3	4
№ задания				
1	-5	6	-2	3
2	6	7	0	1
3	-5; -4	9; 10	0; 1; 2	-3; -2
4	1	0	8	6
5	(5; 30)	(3; 3,125)	(5; 9)	(7; 11)
6	(-3; 3)	(1; 2)	(1; 4)	(0,5; 1)
7	(7; 11)	(-1; 10)	(-5; -3)	(4; 7)
8	(1; 5)	(-1; 3)	(0; 3)	(3; 5)
9	(2; 4)	(6; 7)	(-2; 5)	(1; 1,5)
10	(1,5; 2)	(1,3; 2,3)	(2,5; 3)	(-4; -2)

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ К РАЗДЕЛУ 7

ТЕСТ 1

№ задания	Задание
1	Верно ли, что $\log_2 1 + \log_2 \log_2 \sqrt{2} = 1$?
2	Верно ли, что $\frac{1}{2}(\log_2 3)^{\log_3 2} = 1$?
3	Верно ли, что $\lg 2 + \lg 3 - \lg 6 = 0$?
4	Верно ли, что $\log_2 3 - (\lg 3) / \lg 2 = 0$?
5	Верно ли, что $(\log_{100} 99) \cdot (\log_{99} 98) = 1$?
6	Верно ли, что $(\log_5 3) / (\log_2 5) = 1$?
7	Верно ли, что существует число a , которое является корнем уравнения $\lg ax = -1$?
8	Верно ли, что существует число a , которое является корнем уравнения $\lg\left(\frac{a}{x}\right) = a$?
9	Верно ли, что существует число $x > 1$, при котором $(3^x) \cdot 3 = 3^{3x}$?
10	Верно ли, что существует число $x > 1$, при котором $3^x + 3 = 3^{x+3}$?
11	Верно ли, что $2\lg(-a) = \lg a^2$?
12	Верно ли, что $\log_a a + \log_a -a = 2$?
13	Верно ли, что существует число $x < 1$, при котором $1 + \lg x = \lg(10x)$?
14	Верно ли, что существует число $x < 1$, при котором $2\lg x = \lg(2x)$?
15	Верно ли, что не существует число $x < 0$, при котором $\log_x 2 = -1$?
16	Верно ли, что существует число $x \neq 1$, при котором $\log x^3 = \log(-x)^2$?
17	Верно ли, что найдутся два положительных числа a, b ($a \neq b$), при которых $a^b = ab$?
18	Верно ли, что существуют числа a, b ($a \neq b$), при которых $(\lg a)(\lg b) = \lg(ab)$?

19	Верно ли, что для любых $a > 1$ $\log_a 2 > \log_2 a$
20	Верно ли, что существует $x > 0$, при котором $\log_x 3 > \log_x 10$
21	Верно ли, что не существует такое $x < 0$, при котором $\lg(x+1) < -\lg(-x)$
22	Верно ли, что если $\log_2 x > 1$, то $\log_{\frac{1}{2}} x < 1$?
23	Верно ли, что если $\log_3 x > \log_2 x$, то $\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{2}} x$?
24	Верно ли, что если $x^y = z$, то $x = z^y$?
25	Верно ли, что если $x^y = z$, то $y = \log_x z$?
26	Верно ли, что если $2^x = 3^y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $y = x \log_3 2$?
27	Верно ли, что если $2^x = 3^y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $2 = 3^{\frac{y}{x}}$?
28	Верно ли, что существуют такие положительные числа x и y , при которых $2^x \cdot 3^y = 6^{x+y}$?
29	Верно ли, что существуют такие положительные числа x и y , что $2^x \cdot 2^y = 2^{x-y}$?
30	Верно ли, что существуют не равные между собой числа x , y , отличные от 0 и 1, при которых $\lg(xy) = \lg x + \lg(-y)$?
31	Верно ли, что существуют не равные между собой числа x , y , отличные от 0 и 1, при которых $\log_{\frac{1}{2}} x^y = x \log_{\frac{1}{2}} y$?
32	Верно ли, что уравнение $3^{x^2+x+1} = 1$ имеет единственное решение?
33	Верно ли, что уравнение $2^x = -3x$ имеет единственное решение?
34	Верно ли, что уравнение $4^x + 2^x = 6^x$ имеет единственное решение?
35	Верно ли, что при любых $a \neq 0$, $a \neq 1$ уравнение $2^x = a$ имеет решение?
36	Верно ли, что при любых $a \neq 0$, $a \neq 1$ уравнение

	$2^{ x } = a^2$ имеет решение?
37	Верно ли, что при любых $a \neq 1$ уравнение $a^x = \lg x$ имеет решение?
38	Верно ли, что при любых $a \neq 1$ уравнение $\lg a - \lg x = \lg\left(\frac{x}{a}\right)$ имеет решение?
39	Верно ли, что решение неравенства $\log_2 x \leq \log_3 x$ образует конечный промежуток?
40	Верно ли, что решение неравенства $\lg(x^2) > 1$ образует конечный промежуток?

ТЕСТ 2

№ задания	Задание
1	Верно ли, что $3^{\log_3 2} - 3^0 = 1$?
2	Верно ли, что $(\log_3 4)/(\log_9 16) = 1$?
3	Верно ли, что $\lg 6 - \lg 5 - \lg 1 = 0$?
4	Верно ли, что $5^{\log_3 2} - 2^{\log_3 5} = 0$?
5	Верно ли, что $(\log_{0,5} 0,2) \cdot (\log_{0,04} 0,25) = 1$?
6	Верно ли, что $0,5(\log_2 3 + \log_3 4) = 1$?
7	Верно ли, что существует число a , которое является корнем уравнения $\log_a x = -1$?
8	Верно ли, что существует число a , которое является корнем уравнения $\lg\left(\frac{x^2}{a}\right) = \lg\left(\frac{a}{x^2}\right)$?
9	Верно ли, что существует число $x > 1$, при котором ?
10	Верно ли, что существует число $x > 1$, при котором?
11	Верно ли, что $2 \lg(-a) = \lg \sqrt{-a}$?
12	Верно ли, что $(\log_a a)/\log_{-a} 2 = \log_2 a $?
13	Верно ли, что существует число $x < 1$, при котором $-1 + \lg x = \lg\left(\frac{x}{10}\right)$?
14	Верно ли, что существует число $x < 1$, при котором $0,5 \lg x = \lg(0,5x)$?
15	Верно ли, что не существует число $x < 0$, при котором

	$\log_x 2 + \log_2 \left(\frac{1}{x} \right) = 0?$
16	Верно ли, что существует число $x \neq 1$, при котором $\lg^2 x = \lg x^2$?
17	Верно ли, что найдутся два положительных числа a, b ($a \neq b$), при которых $a^b = \frac{a}{b}$?
18	Верно ли, что существуют числа a, b ($a \neq b$), при которых $(\lg a)/(\lg b) = \frac{a}{b}$?
19	Верно ли, что для любых $a > 1$ $\log_3 a > \log_4 a$?
20	Верно ли, что существует $x > 0$, при котором $\lg^2 x < \lg x$?
21	Верно ли, что не существует такое $x < 0$, при котором $\log_{ x } 2 < \log_{ x } 3$?
22	Верно ли, что если $\log_2 x < 1$, то $\log_x 2 > 1$?
23	Верно ли, что если $\log_x 3 < \log_x 2$, то $\log_x \frac{1}{3} < \log_x \frac{1}{2}$?
24	Верно ли, что если $x^y = z$, то $y = x^z$?
25	Верно ли, что если $x^y = z$, то $x = \log_z y$?
26	Верно ли, что если $2^x = 3^y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $x = \log_2 3^y$?
27	Верно ли, что если $2^x = 3^y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $\frac{x}{y} = \log_2 3$?
28	Верно ли, что существуют такие положительные числа x и y , при которых $2^x / 3^y = \left(\frac{2}{3} \right)^{x+y}$?
29	Верно ли, что существуют такие положительные числа x и y , что $2^x / 2^y = 2^{\frac{x}{y}}$?
30	Верно ли, что существуют не равные между собой числа x, y , отличные от 0 и 1, при которых

	$\log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = \log_2 x + \log_2 y?$
31	Верно ли, что существуют не равные между собой числа x, y , отличные от 0 и 1, при которых $x^{\log_y 2} = y^{\log_x 2}$?
32	Верно ли, что уравнение $10^{x+7} = 20^{5-x}$ имеет единственное решение?
33	Верно ли, что уравнение $4^x + 2^x = 1$ имеет единственное решение?
34	Верно ли, что уравнение $2^{-x^2} = 3^{x^2}$ имеет единственное решение?
35	Верно ли, что при любых $a \neq 0, a \neq 1$ уравнение $2^x = a $ имеет решение?
36	Верно ли, что при любых $a \neq 0, a \neq 1$ уравнение $a2^x = 2^{ax}$ имеет решение?
37	Верно ли, что при любых $a \neq 1$ уравнение $a^x = \log_{\frac{1}{2}} x$ имеет решение?
38	Верно ли, что при любых $a \neq 1$ уравнение $a \lg x = \lg(ax)$ имеет решение?
39	Верно ли, что решение неравенства $\log_x 5 < \log_x 6$ образует конечный промежуток?
40	Верно ли, что решение неравенства $\lg(26) > \lg x$ образует конечный промежуток?

Ответы к тестам

Тест 1				Тест 2			
№ задания	ответ	№ задания	ответ	№ задания	ответ	№ задания	ответ
1	нет	21	нет	1	да	21	нет
2	нет	22	да	2	да	22	да
3	да	23	да	3	нет	23	нет
4	да	24	нет	4	да	24	нет

5	нет	25	нет	5	да	25	нет
6	нет	26	да	6	нет	26	да
7	да	27	да	7	да	27	да
8	да	28	нет	8	да	28	да
9	нет	29	нет	9	нет	29	да
10	нет	30	нет	10	да	30	нет
11	да	31	да	11	да	31	да
12	да	32	да	12	да	32	да
13	да	33	нет	13	да	33	да
14	нет	34	да	14	нет	34	да
15	да	35	нет	15	да	35	да
16	нет	36	нет	16	да	36	нет
17	да	37	нет	17	да	37	нет
18	да	38	да	18	да	38	да
19	да	39	да	19	да	39	да
20	да	40	нет	20	да	40	нет

8 ТРИГОНОМЕТРИЯ

8.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Основные тригонометрические формулы

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
2. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$,
3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,
4. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$,
5. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$,
6. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$,
7. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$,
8. $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$,
9. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$,
10. $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Формулы приведения

Функция	Угол			
	$\pm \alpha$	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$
sin	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
tg	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
ctg	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

Формулы для суммы и разности аргументов

$$1. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

$$2. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

$$3. \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb}}{1 \mp \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}.$$

$$4. \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctga} \cdot \operatorname{ctgb} \mp 1}{\operatorname{ctgb} \pm \operatorname{ctga}}.$$

Формулы двойных и половинных углов

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$4. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$5. \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$6. \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

$$7. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Формулы преобразования произведения в сумму и обратно

$$1. \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$2. \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$3. \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$4. \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$5. \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$6. \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$7. \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшие тригонометрические уравнения

$$1. \sin x = a, \quad a \in [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \cos x = a, \quad a \in [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{tg} x = a \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg} x = a \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения вида $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$.

Введением вспомогательного аргумента j , определяемого условиями

$$\sin j = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos j = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

уравнение сводится к простейшему уравнению вида

$$\sin(x + j) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Однородное уравнение

Уравнение $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$ называется однородным уравнением второго порядка. Оно приводится к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} x$ после деления на $\cos^2 x$. Уравнение $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = d$ становится однородным после замены $d = d \cdot \sin^2 x + d \cdot \cos^2 x$.

Уравнения вида $R(\sin x, \cos x) = 0$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция своих аргументов.

В общем случае уравнение $R(\sin x, \cos x) = 0$ универсальной тригонометрической подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ($x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) сводится к алгебраическому уравнению относительно переменной t , т.к. в

этом случае $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

В частных случаях уравнения $R(\sin x, \cos x) = 0$ с помощью тригонометрических формул сводятся к алгебраическим уравнениям относительно какой-либо тригонометрической функции, например:

- уравнения, сводящиеся к квадратному уравнению;
- однородные уравнения;
- уравнения, допускающие понижение порядка.

Уравнения, связывающие тригонометрические функции разных аргументов

Решаются путем сведения к уравнениям относительно тригонометрических функций одного аргумента или к равенству одноименных функций разных аргументов.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшие тригонометрические неравенства

Простейшими тригонометрическими неравенствами называют неравенства вида $\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$ и аналогичные неравенства для функций $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

В общем случае решение неравенств осуществляется сведением их к простейшим неравенствам или их системам с помощью тригонометрических преобразований.

Графический метод решения простейших неравенств

Графический метод состоит в построении графиков функций, расположенных в левой и правой частях неравенств. Затем находятся интервалы значений аргумента, для которых неравенство выполняется на периоде и, далее, устанавливаются решения неравенства для всех $x \in \mathbb{R}$.

Решение неравенств с помощью тригонометрического круга

Метод состоит в построении области решения на единичной окружности с дальнейшим определением решений неравенства для всех $x \in \mathbb{R}$.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определения обратных тригонометрических функций

1. $\arcsin x = a$, $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \sin a = x$, $a \in [-\pi/2; \pi/2]$.
2. $\arccos x = a$, $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \cos a = x$, $a \in [0; \pi]$.
3. $\operatorname{arctg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{tg} a = x$, $a \in (-\pi/2; \pi/2)$.
4. $\operatorname{arcctg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{ctg} a = x$, $a \in (0; \pi)$.

Основные тождества

1. $\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \quad x \in [-1; 1].$

2. $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1; 1].$

3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad x \in [-1; 1].$

4. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2.$

5. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$

6. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$

8.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8$.

Решение.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8 \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 0,64 \Rightarrow$$

$$\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 0,64 \Rightarrow$$

$$1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,64 \Rightarrow \sin 2\alpha = -0,36.$$

Ответ: $-0,36$.

2. Найдите $3\cos^2 \alpha - 5\sin^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 5$.

Решение.

$$1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + 25 = 26 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1/26,$$

$$1/\sin^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + 1/25 = 26/25 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 25/26,$$

$$3\cos^2 \alpha - 5\sin^2 \alpha = 3/26 - 5 \cdot 25/26 = -122/26 = -61/13.$$

Ответ: $-61/13$.

3. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Решение.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $-4/3$.

4. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}2\alpha = \sqrt{15}$ и $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{15} \Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15} - \sqrt{15}\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{15}\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{15} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{\sqrt{15}} = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{15}} \\ -\frac{5}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

Второй корень отбрасываем, так как значения $\operatorname{tg}\alpha$ положительны при $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{15}}$.

5. Докажите, что $\operatorname{tg}75^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}75^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}30^\circ}{1 - \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

6. Вычислите $\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}}.$

Решение.

$$\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}} = \frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right)}{2\cos\frac{3\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}} = \frac{6\cos\frac{3\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{3\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}} = 3.$$

Ответ: 3.

7. Вычислите $\frac{\operatorname{ctg}78^\circ - \operatorname{ctg}303^\circ}{1 + \operatorname{tg}(-192^\circ) \cdot \operatorname{ctg}237^\circ}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg}78^\circ - \operatorname{ctg}303^\circ}{1 + \operatorname{tg}(-192^\circ) \cdot \operatorname{ctg}237^\circ} &= \frac{\operatorname{ctg}78^\circ - \operatorname{ctg}303^\circ}{1 - \operatorname{tg}192^\circ \cdot \operatorname{ctg}237^\circ} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg}78^\circ - \operatorname{ctg}(360^\circ - 57^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(270^\circ - 78^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ + 57^\circ)} = \frac{\operatorname{ctg}78^\circ + \operatorname{ctg}57^\circ}{1 - \operatorname{ctg}78^\circ \cdot \operatorname{ctg}57^\circ} = \\ &= -\frac{1}{\frac{\operatorname{ctg}78^\circ \cdot \operatorname{ctg}57^\circ - 1}{\operatorname{ctg}78^\circ + \operatorname{ctg}57^\circ}} = -\frac{1}{\operatorname{ctg}135^\circ} = -\operatorname{tg}135^\circ = \\ &= -\operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = \operatorname{ctg}45^\circ = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

8. Упростите выражение $\frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - 2 \sin^2 3\alpha}{\cos 5\alpha - \cos \alpha}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - 2 \sin^2 3\alpha}{\cos 5\alpha - \cos \alpha} &= \frac{2 \sin 3\alpha (\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin 3\alpha)}{-2 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha} = \\ &= -\frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin(\alpha + 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \\ &= -\frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha - (\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $\cos \alpha$.

9. Докажите тождество $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2/\sin 2\alpha$.

Решение.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{0,5 \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

10. Докажите тождество $\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha} = \\&= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)} = \\&= \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.\end{aligned}$$

11. Докажите тождество

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 3\cos 2\alpha - 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) &= \\&= \cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{2} + 2(\cos 2\alpha + \cos \frac{2\pi}{3}) = \\&= \cos 2\alpha - 0 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cdot (-1/2) = 3 \cos 2\alpha - 1.\end{aligned}$$

12. Докажите тождество $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$

Решение.

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).
\end{aligned}$$

13. Докажите тождество $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{\sin 2\alpha (\cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha)}{\cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin 2\alpha (\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\cos 4\alpha + \cos 2\alpha))}{\cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha} = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha \frac{(-2) \sin 3\alpha \sin(-\alpha)}{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha} = \\
&= \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.
\end{aligned}$$

14. Докажите тождество $\frac{1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha (\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} = \sin \alpha$.

Решение.

$$\frac{1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha (\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} =$$

$$\frac{(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) (\sin \alpha + \cos \alpha) (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha) \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} = \sin \alpha.$$

15. Решите уравнение $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$.

Решение.

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\pi/6 + x = (-1)^k \pi/4 + \pi k \Leftrightarrow x = -\pi/6 + (-1)^k \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\pi/6 + (-1)^k \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

16. Решите уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$.

Решение.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \sin 5x \Leftrightarrow$$

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sin 5x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin 5x \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin 5x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{8} + 3x\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} - 2x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{8} + 3x) = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{8} - 2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{8} + 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi}{8} - 2x = \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3} \\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi/8 + \pi k/3$; $\pi/16 + \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

17. Решите уравнение $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$.

Решение.

Область допустимых значений неизвестной $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, можно применять формулы

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Вводя переменную $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получаем уравнение $\frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{2}$ или

$$\frac{1+t^2+2t}{1+t^2+1-t^2} = \frac{1}{2}, \text{ после упрощения которого имеем}$$

$$(1+t)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi k \\ x = -2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $2\pi k, -2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

18. Решите уравнение $\cos^2 x - 2 \sin x = -1/4$.

Решение.

$$\begin{aligned} \cos^2 x - 2 \sin x = -1/4 &\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - 2 \sin x = -1/4 \Leftrightarrow \\ \sin^2 x + 2 \sin x - 5/4 &= 0. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную $t = \sin x$ ($|t| \leq 1$), получим квадратное уравнение $4t^2 + 8t - 5 = 0$ с корнями $t_1 = 1/2$ и $t_2 = -5/2$, второй из которых не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$. Возвращаясь к переменной x , получим

$$\sin x = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^k \pi/6 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^k \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

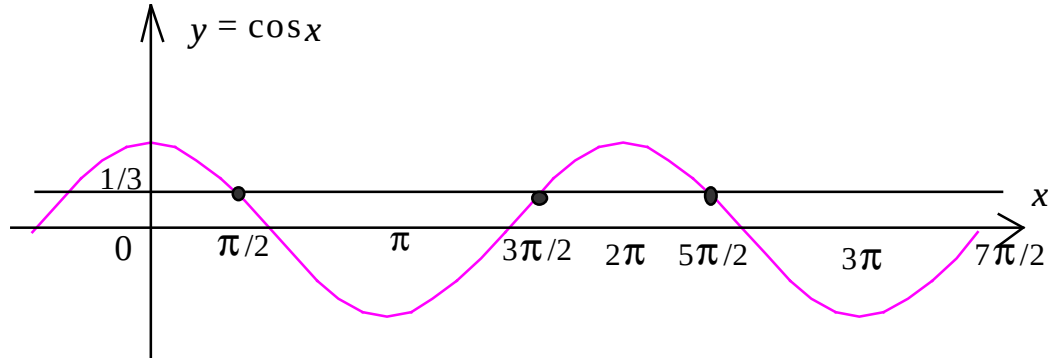
19. Найдите число решений уравнения $3\sin^2 x - 8\cos x + 1 = 0$, принадлежащих отрезку $[0; 7\pi/2]$.

Решение.

$$\begin{aligned} 3\sin^2 x - 8\cos x + 1 = 0 &\Leftrightarrow 3(1 - \cos^2 x) - 8\cos x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 3\cos^2 x + 8\cos x - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную $t = \cos x$ ($|t| \leq 1$), получим квадратное уравнение $3t^2 + 8t - 3 = 0$ с корнями $t_1 = -1/3$ и $t_2 = -3$, второй из

которых не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$. Возвращаясь к переменной x , получим $\cos x = 1/3$. На рисунке изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = 1/3$.



На отрезке $[0; 7\pi/2]$ графики функций $y = \cos x$ и $y = 1/3$ пересекаются три раза, следовательно, уравнение $\cos x = 1/3$ имеет три решения.

Ответ: 3.

20. Найдите сумму корней (в градусах) уравнения $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$, принадлежащих промежутку $(0; 360^\circ)$.

Решение.

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную $t = \sin x$ ($|t| \leq 1$), получим квадратное уравнение $2t^2 + 8t - 5 = 0$ с корнями $t_1 = -1/2$ и $t_2 = 3$, второй из которых не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$. Возвращаясь к переменной x , получим

$$\sin x = -1/2 \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^k (-30^\circ) + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отбираем корни на интервале $(0; 360^\circ)$:

1) если $k = 1$, то $x = 210^\circ$,

2) если $k = 2$, то $x = 330^\circ$.

При $k \geq 3$ и $k \leq 0$ корни выходят за пределы интервала $(0; 360^\circ)$:

Ответ: 540° .

21. Решите уравнение $3\sin^2x - 7\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2x = 0$.

Решение.

При любом целом k значения $x = \pi/2 + \pi k$ не являются корнями данного уравнения. Разделив обе части на $\cos^2x$ ($\cos x \neq 0$ при $x \neq \pi/2 + \pi k$), получаем $3\operatorname{tg}^2x - 7\operatorname{tg}x + 2 = 0$. Положив $\operatorname{tg}x = t$, приходим к квадратному уравнению $3t^2 - 7t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = 2$ и $t_2 = 1/3$.

Необходимо рассмотреть два случая:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x = 2 \\ \operatorname{tg}x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg}2 + \pi k \\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}2 + \pi k$; $\operatorname{arctg}1/3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

22. Решите уравнение $(\cos x - \sin(x - \pi))^2 + 1 = 2\cos^2x$.

Решение.

$$\begin{aligned} (\cos x - \sin(x - \pi))^2 + 1 &= 2\cos^2x \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)^2 + 1 = 2\cos^2x \Leftrightarrow \\ \cos^2x + 2\sin x \cdot \cos x + \sin^2x + 1 &= 2\cos^2x \Leftrightarrow \\ 2 + 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2x &= 0 \Leftrightarrow \sin^2x + \sin x \cdot \cos x = 0. \end{aligned}$$

Разделив уравнение на $\cos^2 x$ (при $\cos x = 0$ левая часть равенства отлична от нуля), получаем $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$.

Необходимо рассмотреть два случая:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k \\ x = -\pi/4 + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k; -\pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

23. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Решение.

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 - \cos 2x - \cos 4x = -\cos 6x \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 1 + \cos 6x \Leftrightarrow$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos x = 2 \cos^2 3x \Leftrightarrow \cos 3x (\cos x - \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x \cdot \sin 2x \cdot \sin x = 0.$$

Необходимо рассмотреть три случая:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi/6 + \pi k/3 \\ x = \pi k/2 \\ x = \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решения $x = \pi k$ поглощаются решениями $x = \pi k/2$ при четном k .

Ответ: $\pi/6 + \pi k/3; \pi k/2, \quad k \in \mathbb{Z}$.

24. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5$.

Решение.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5 \Rightarrow$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin 2x - 0,5 \Rightarrow$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2x + \sin 2x - 0,5 \Rightarrow$$

$$1,5 = 0,5 \cdot \sin^2 2x + \sin 2x \Rightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0.$$

Пусть $\sin 2x = t$ ($|t| \leq 1$). Квадратное уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$ имеет два корня $t_1 = 1$ и $t_2 = -3$, второй из которых не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$. Тогда

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \pi/2 + 2\pi k \Rightarrow x = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

25. Решите уравнение
$$\frac{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2 - \sin x}{\cos^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 x} = 2.$$

Решение.

$$\frac{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2 - \sin x}{\cos^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x} = 2 \Leftrightarrow (1 + \cos x)^2 + \sin^2 x = 2 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

26. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Решение.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\sin 2x \cdot (2 \cos x + 1) = \cos x (2 \cos x + 1) \Leftrightarrow$$

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot (2 \cos x + 1) = \cos x \cdot (2 \cos x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\cos x (2 \sin x - 1)(2 \cos x + 1) = 0.$$

Необходимо рассмотреть три случая:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1/2 \\ \cos x = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + \pi k \\ x = (-1)^k \pi/6 + \pi k \\ x = \pm 2\pi/3 + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi/2 + \pi k; (-1)^k \pi/6 + \pi k; \pm 2\pi/3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

27. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pi/2 + \pi k, x \neq \pi/4 + \pi k/2, x \neq \pi/6 + \pi k/3; k \in \mathbb{Z}.$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \cdot \left(\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{1}{\cos 3x} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin 3x \cdot (\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 3x \cdot (\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x - \cos x \cdot \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 3x \cdot \sin x \cdot \sin 2x = 0.$$

Необходимо рассмотреть три случая:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k / 2, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k / 3, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Объединяя решения, получаем $x = \pi k / 6, k \in \mathbb{Z}, k \neq 6n \pm 1$.

Ответ: $\pi k / 6, k \in \mathbb{Z}, k \neq 6n \pm 1$.

28. Решите уравнение $\cos 3x \cdot \cos x = \cos 5x \cdot \cos 7x$.

Решение.

$$\cos 3x \cdot \cos x = \cos 5x \cdot \cos 7x \Leftrightarrow$$

$$(\cos 4x + \cos 2x) / 2 = (\cos 12x + \cos 2x) / 2 \Leftrightarrow$$

$$\cos 12x - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 8x \cdot \sin 4x = 0.$$

Необходимо рассмотреть два случая:

$$\begin{cases} \sin 8x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k / 8, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi n / 4, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{..}$$

Объединяя решения, получаем $x = \pi k / 8, k \in \mathbb{Z}$.

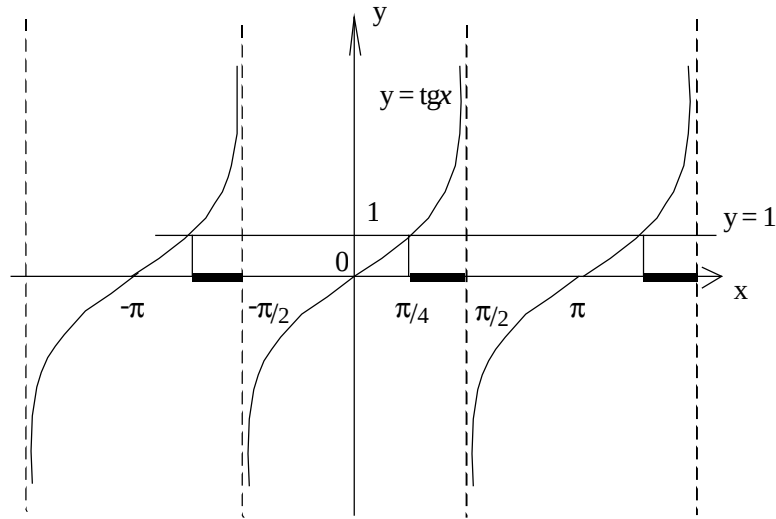
Ответ: $\pi k / 8, k \in \mathbb{Z}$.

29. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \geq 1$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pi / 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

На рисунке приведены графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$.



Множество значений $x \in [\pi/4; \pi/2)$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{tg} x \geq 1$ на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$. Следовательно, решение неравенства имеет вид $x \in [\pi/4 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $[\pi/4 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

30. Решите неравенство $\cos(x + \pi/2) > 1/2$.

Решение.

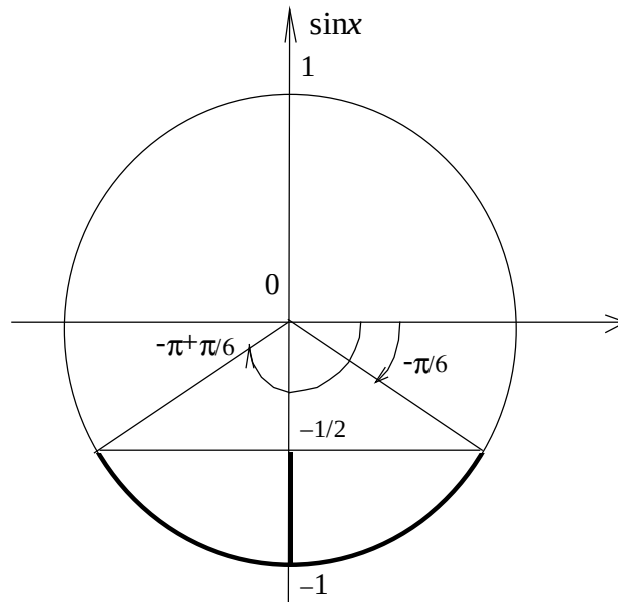
$$\cos(x + \pi/2) > 1/2 \Leftrightarrow -\sin x > 1/2 \Leftrightarrow \sin x < -1/2.$$

Решение выполняется в следующей последовательности:

- чертится единичная окружность;
- на соответствующей оси отмечается значение и выделяется промежуток, в котором тригонометрическая функция удовлетворяет неравенству;

- на окружности указываются углы, при которых $\sin x = -1/2$ и устанавливается область решения неравенства за один период;
- находится решение неравенства для всех значений аргумента.

Рисунок иллюстрирует решение неравенства с помощью единичной окружности, выполненное в соответствии с изложенным алгоритмом.



Решение неравенства на промежутке $(-\pi; \pi]$ имеет вид

$$x \in (-\pi/6; -\pi + \pi/6).$$

Тогда решение неравенства для любых значений x может быть записано в виде ($k \in \mathbb{Z}$):

$$2k\pi - \pi/6 < x < 2k\pi - 5\pi/6$$

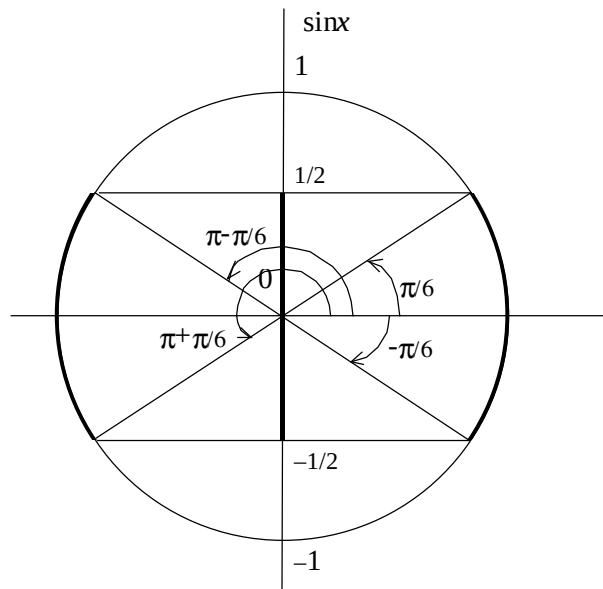
Ответ: $(2k\pi - \pi/6; 2k\pi - 5\pi/6)$, $k \in \mathbb{Z}$.

31. Решите неравенство $|\sin x| < 1/2$.

Решение.

$$|\sin x| < 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad -1/2 < \sin x < 1/2.$$

Рисунок иллюстрирует решение неравенства с помощью единичной окружности.



На промежутке $(-\pi/2; 3\pi/2]$ неравенство выполняется при

$$x \in (-\pi/6; \pi/6) \cup (\pi - \pi/6; \pi + \pi/6).$$

Тогда решение неравенства для любых значений x может быть записано в виде:

$$x \in (2k\pi - \pi/6; 2k\pi + \pi/6) \cup (2k\pi + \pi - \pi/6; 2k\pi + \pi + \pi/6)$$

или, объединяя решения, $x \in (k\pi - \pi/6; k\pi + \pi/6), k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(k\pi - \pi/6; k\pi + \pi/6), k \in \mathbb{Z}$.

32. Решите неравенство $|\sin^2 x - \cos^2 x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

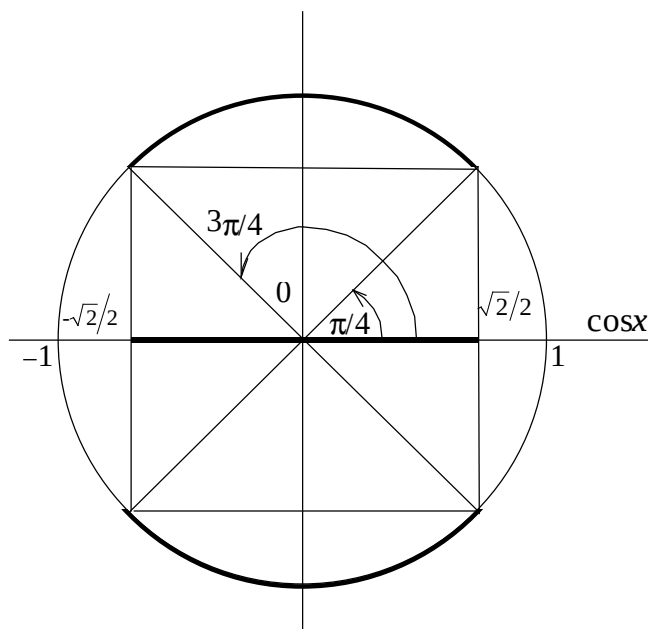
Решение.

$$|\sin^2 x - \cos^2 x| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |\cos 2x| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На интервале $[0; \pi]$ двойное неравенство выполняется при $\pi/4 < 2x < 3\pi/4$. С учетом четности функции $y = \cos x$, решение на

интервале $(-\pi; \pi]$ можно записать в виде
$$\begin{cases} \pi/4 < 2x < 3\pi/4 \\ -\pi/4 < 2x < -3\pi/4 \end{cases}.$$

Рисунок иллюстрирует решение неравенства с помощью единичной окружности.



Решение неравенства для любых значений x имеет вид:

$$2x \in (2k\pi + \pi/4; 2k\pi + 3\pi/4) \cup (2k\pi + 5\pi/4; 2k\pi + 7\pi/4) \Leftrightarrow$$

$$2x \in (k\pi + \pi/4; k\pi + 3\pi/4) \Leftrightarrow x \in (k\pi/2 + \pi/8; k\pi/2 + 3\pi/8), k \in \mathbb{Z}.$$

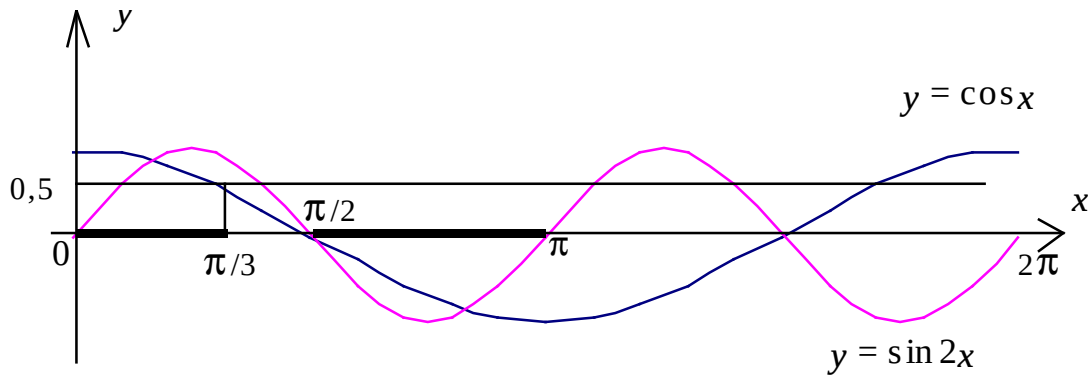
Ответ: $(k\pi/2 + \pi/8; k\pi/2 + 3\pi/8), k \in \mathbb{Z}.$

33. Решите неравенство $\sin x + \sin 3x > \sin 2x$.

Решение.

$$\sin x + \sin 3x > \sin 2x \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos x > \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\sin 2x \cdot (1 - 2\cos x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x < 0 \\ 1 - 2\cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x < 0 \\ \cos x < 1/2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x > 0 \\ 1 - 2\cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x > 0 \\ \cos x > 1/2 \end{cases}.$$



На рисунке изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = \sin 2x$. На интервале $[0; 2\pi)$ системам неравенств удовлетворяют значения x , принадлежащие промежуткам $(0; \pi/3)$ и $(\pi/2; \pi)$. Решение неравенств для любых значений x имеет вид:

$$x \in (2\pi k; \pi/3 + 2\pi k) \cup (\pi/2 + 2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } (2\pi k; \pi/3 + 2\pi k) \cup (\pi/2 + 2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

34. Решите неравенство $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x < \sqrt{3}(\operatorname{tg} x + 1)$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x < \sqrt{3}(\operatorname{tg} x + 1) &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x + 1) < \sqrt{3}(\operatorname{tg} x + 1) \Leftrightarrow \\ (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg} x + 1) < 0 &\Rightarrow -1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x \in (-\pi/4 + \pi k; \pi/3 + \pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-\pi/4 + \pi k; \pi/3 + \pi k), k \in \mathbb{Z}.$

35. Решите неравенство $5\sin x - 2\sin 2x > 0.$

Решение.

$$5\sin x - 2\sin 2x > 0 \Leftrightarrow 5\sin x - 4\sin x \cdot \cos x > 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (5 - 4\cos x) > 0.$$

Выражение в скобках положительно для всех значений x , поэтому полученное неравенство равносильно неравенству $\sin x > 0$.

Ответ: $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$

36. Решите неравенство $\sin x + \sin 3x > 0.$

Решение.

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x > 0 &\Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos x > 0 \Leftrightarrow \\ 4\sin x \cdot \cos^2 x > 0 &\Leftrightarrow (\sin x > 0 \cap \cos x \neq 0) \Rightarrow \\ x \in (2\pi k, \pi/2 + 2\pi k) \cup (\pi/2 + 2\pi k, \pi + 2\pi k), &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $(2\pi k, \pi/2 + 2\pi k) \cup (\pi/2 + 2\pi k, \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$

37. Решите неравенство $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x.$

Решение.

$$\begin{aligned} 4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x > \sin 4x &\Leftrightarrow 2(\cos 2x - \cos 4x) \cdot \sin 2x > \sin 4x \\ \Leftrightarrow 2\cos 2x \cdot \sin 2x - 2\cos 4x \cdot \sin 2x > \sin 4x &\Leftrightarrow \\ \sin 4x - 2\cos 4x \cdot \sin 2x > \sin 4x &\Leftrightarrow -2\cos 4x \cdot \sin 2x > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - 2\sin^2 2x) \cdot \sin 2x < 0 \Leftrightarrow \\
& (\sqrt{2} \sin 2x - 1) \cdot (\sqrt{2} \sin 2x + 1) \cdot \sin 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 2x < 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} 2x \in (\pi/4 + 2k\pi; 3\pi/4 + 2k\pi) \\ 2x \in (-\pi/4 + 2k\pi; 2k\pi) \cup (-\pi + 2k\pi; -3\pi/4 + 2k\pi), \end{cases} k \in \mathbb{Z} \\
& \Rightarrow \begin{cases} x \in (\pi/8 + k\pi; 3\pi/8 + k\pi) \\ x \in (-\pi/8 + k\pi; k\pi) \\ x \in (-\pi/2 + 2k\pi; -3\pi/8 + k\pi), \end{cases} k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ответ: $(-\pi/8 + \pi k; \pi k) \cup (\pi/8 + \pi k; 3\pi/8 + \pi k) \cup$
 $(-\pi/2 + \pi k; -3\pi/8 + \pi k), k \in \mathbb{Z}.$

38. Решите неравенство $\sin x > \cos^2 x$.

Решение.

$$\sin x > \cos^2 x \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x < 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 > 0.$$

Введя новую переменную $t = \sin x$ ($|t| \leq 1$), получим квадратное неравенство $t^2 + t - 1 > 0$, решением которого являются значения

$$t \in (-\infty; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty), \text{ что вместе с условием } |t| \leq 1 \text{ дает}$$

$$t \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1]. \text{ Возвращаясь к переменной } x, \text{ получим: } \sin x \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1].$$

$$\text{Тогда } x \in (\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k, \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k; \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$

39. Вычислите $\operatorname{tg}(\arcsin(-1/4) + \pi/2)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\arcsin(-1/4) + \pi/2) &= \operatorname{tg}(\pi/2 - \arcsin(1/4)) = \operatorname{ctg}(\arcsin(1/4)) = \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\arcsin(1/4))} - 1} = \sqrt{\frac{1}{(1/4)^2} - 1} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{15}$.

40. Вычислите $\cos(2\arctg 1 - \arccos(5/13))$.

Решение.

$$\begin{aligned} \cos(2\arctg 1 - \arccos(5/13)) &= \cos(2(\pi/4) - \arccos(5/13)) = \\ &= \cos(\pi/2 - \arccos(5/13)) = \sin(\arccos(5/13)) = 12/13. \end{aligned}$$

Учитывая, что $0 < \arccos(5/13) < \pi$, а функция $y = \sin x$ положительна в этом интервале, окончательно получаем:

$$\sin(\arccos(5/13)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(5/13))} = \sqrt{1 - (5/13)^2} = 12/13.$$

Ответ: $12/13$.

3. Вычислите $\sin(2\arccos(-12/13))$.

Решение.

$$\sin(2\arccos(-12/13)) = 2\sin(\arccos(-12/13)) \cos(\arccos(-12/13)) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sin(\pi - \arccos(12/13))(-12/13) = 2\sin(\arccos(12/13))(-12/13) = \\
&= -\frac{24}{13}\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(12/13))} = -\frac{24}{13}\sqrt{1 - (12/13)^2} = -\frac{120}{169}.
\end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{120}{169}$.

41. Вычислите $\cos(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3})$.

Решение.

Обозначим $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. Тогда $\cos\alpha = 1/3$ и $0 < \alpha < \pi/2$, поскольку

$$\cos\alpha > 0. \quad \text{Отсюда следует} \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{или}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

42. Вычислите $\cos(\arcsin(4/5) - \arccos(3/5))$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&\cos(\arcsin(4/5) - \arccos(3/5)) = \\
&= \cos(\arcsin(4/5)) \cdot \cos(\arccos(3/5)) + \sin(\arcsin(4/5)) \cdot \sin(\arccos(3/5)) = \\
&= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: 1.

43. Вычислите $\arcsin(\sin(22\pi/7))$.

Решение.

Для $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ выполняется тождество $\arcsin(\sin x) = x$. По формулам приведения (с учетом периодичности функции $\sin x$), получаем

$$\sin(22\pi/7) = \sin(3\pi + \pi/7) = \sin(\pi + \pi/7) = -\sin(\pi/7) = \sin(-\pi/7).$$

Тогда $\arcsin(\sin(22\pi/7)) = \arcsin(\sin(-\pi/7)) = -\pi/7$.

Ответ: $-\pi/7$.

44. Вычислите $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 8)$.

Решение.

Для $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ выполняется тождество $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$. По формулам приведения (с учетом периодичности функции $\operatorname{tg} x$), получаем:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 8) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi/2 - 8)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(5\pi/2 - 8)) = 5\pi/2 - 8.$$

Ответ: $5\pi/2 - 8$.

8.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Найдите $\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\cos \alpha = -1/7$.

Ответ: 49,000424.

3. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sqrt{3}$.

Ответ: $2 + \sqrt{3}$.

4. Докажите, что $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

5. Вычислите $\frac{\cos^2 37^\circ - \sin^2 23^\circ}{\cos 14^\circ}$.

Ответ: $1/2$.

6. Вычислите $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$.

Ответ: 2.

7. Упростите выражение $\frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{\cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha} - \frac{2}{\cos 2\alpha}$.

Ответ: 2.

Докажите тождество.

8. $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 1 + \cos \alpha$.

9. $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$.

$$10. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin \alpha) = \cos \alpha.$$

$$11. \frac{2 \cos^2 2\alpha - 1}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)} = 1.$$

$$12. 2/\sin 4\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Решите уравнение.

$$13. \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1.$$

Ответ: $2\pi k; 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$$14. 2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2.$$

Ответ: $\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$$15. 3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0.$$

Ответ: $-\arctg 3 + \pi k; \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$$16. 1 - \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin(x - \pi).$$

Ответ: $\pi k; \pi/2 + \pi k; (-1)^k \cdot \pi/6 + k, k \in \mathbb{Z}.$

$$17. 1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Ответ: $\pi k/2, k \in \mathbb{Z}.$

$$18. \sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cdot \cos 2x.$$

Ответ: $\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$.

19. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi k/5; \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

20. $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$.

Ответ: $\pi/4 + \pi k/2; (-1)^k \pi/12 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$.

21. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

Ответ: $\pi k/2; \pi/8 + \pi k/4, k \in \mathbb{Z}$.

Решите неравенство.

22. $2\sin x - \sqrt{3} \leq 0$.

Ответ: $[-4\pi/3 + 2\pi k; \pi/3 + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$.

23. $|\operatorname{tg} 2x| < \sqrt{3}$.

Ответ: $[-\pi/6 + \pi k/2; \pi/6 + \pi k/2], k \in \mathbb{Z}$.

24. $\sin^2 3x > 3/4$.

Ответ: $(\pi/9 + \pi k/3, 2\pi/9 + \pi k/3), k \in \mathbb{Z}$.

25. $4\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x > 3$.

Ответ: $(\pi/4 + \pi k, \operatorname{arctg} 3 + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

26. $\sin x + \cos x > 1$.

Ответ: $(2\pi k, \pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

27. $\sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 1$.

Ответ: $[\pi/2 + 2\pi k; 11\pi/6 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

28. $\cos 3x - \cos x \leq 0$.

Ответ: $[2\pi k; \pi/4 + 2\pi k] \cup [3\pi/4 + 2\pi k; \pi + 2\pi k] \cup$
 $[5\pi/4 + 2\pi k; 7\pi/4 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

29. $\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \geq 2 \operatorname{tg} x$.

Ответ: $(-\arctg(1 + \sqrt{2}) + \pi k; \arctg(1 - \sqrt{2}) + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

30. $\sin 3x + \sin 5x > 3 \sin 4x$.

Ответ: $[2\pi k - \pi/4; \pi k/2]$, $k \in \mathbb{Z}$.

31. $\cos x \leq \sin^2 x$.

Ответ: $[\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k; 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

32. Вычислите $\sin(\arcsin 1 + \arctg 2)$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

33. Вычислите $\cos(2\arcsin(4/5))$.

Ответ: $-7/25$.

34. Вычислите $\cos(\frac{1}{2}\arcsin(-3/5))$.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

35. Вычислите $\sin(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\arcsin\frac{4}{5})$.

Ответ: $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

36. Вычислите $\arccos(\cos(29\pi/5))$.

Ответ: $\pi/5$.

37. Вычислите $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}12)$.

Ответ: $9\pi/2 - 12$.

8.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ

Тригонометрические преобразования

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Представить в виде произведения: $\sin \frac{3}{4} \alpha - \sin \frac{2}{7} \alpha$
2	Представить в виде произведения: $\sin 10\alpha \cdot \sin 8\alpha + \sin 8\alpha \cdot \sin 6\alpha$
3	Представить в виде произведения: $2 \sin 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha$
4	Упростить: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha =$
5	Упростить: $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
6	Упростить: $\frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}$
7	Упростить: $\frac{\cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 1}$
8	Упростить: $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 + \sin \alpha)}$
9	Упростить: $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha}$
10	Упростить: $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$

Тригонометрические преобразования

Вариант 2

№ задания	Задание
1	Представить в виде произведения: $\sin \frac{5}{2} \alpha + \sin \frac{3}{5} \alpha$
2	Представить в виде произведения: $\sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 5\alpha$
3	Представить в виде произведения: $1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$
4	Упростить: $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha}$
5	Упростить: $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$
6	Упростить: $(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \cos 3\alpha)$
7	Упростить: $\frac{1 + 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2 \cos \alpha + 1}$
8	Упростить: $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}$
9	Упростить: $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta}$
10	Упростить: $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$

Тригонометрические преобразования

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Представить в виде произведения: $\cos \frac{5}{6} \alpha + \cos \frac{4}{15} \alpha$
2	Представить в виде произведения: $\cos 10\alpha \cdot \cos 8\alpha + \cos 8\alpha \cdot \cos 6\alpha$
3	Представить в виде произведения: $\cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha - \cos 6\alpha$
4	Упростить: $\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2 \frac{3}{2} \alpha - \sin^2 \frac{3}{2} \alpha}$
5	Упростить: $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$
6	Упростить: $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha}$
7	Упростить: $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha}$
8	Упростить: $1 + \frac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)}$
9	Упростить: $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta}$
10	Упростить: $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$

Тригонометрические преобразования

Вариант 4

№ задания	Задание
1	Представить в виде произведения: $\cos \frac{3}{8} \alpha - \cos \frac{7}{24} \alpha$
2	Представить в виде произведения: $\cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 4\alpha$
3	Представить в виде произведения: $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$
4	Упростить: $\frac{\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$
5	Упростить: $\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin 3\alpha + \cos 4\alpha \sin \alpha$
6	Упростить: $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos 2\alpha - 1$
7	Упростить: $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)}$
8	Упростить: $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$
9	Упростить: $\frac{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta}$
10	Упростить: $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$

Тригонометрические преобразования

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	$2 \sin \frac{17}{56} \alpha \cos \frac{29}{56} \alpha$	$2 \sin \frac{31}{20} \alpha \cos \frac{19}{20} \alpha$	$2 \cos \frac{11}{20} \alpha \cos \frac{17}{60} \alpha$	$-2 \sin \frac{1}{3} \alpha \sin \frac{1}{24} \alpha$
2	$2 \sin^2 8\alpha \cos 2\alpha$	0	$2 \cos^2 8\alpha \cos 2\alpha$	$4 \sin 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$
3	$2 \sin 3\alpha(1 - \sin \alpha)$	$2\sqrt{2} \cos \alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$	$2 \sin 2\alpha(1 - \sin 4\alpha)$	$\sin 2\alpha(2 \cos \alpha + 1)$
4	$\frac{2}{\sin 2\alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$2 \sin \alpha$	$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$
5	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	0
6	$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	$2 \sin \alpha$	$2 \cos 2\alpha$	$-\operatorname{tg}^2 \alpha$
7	$\operatorname{tg}^4 \alpha$	$-\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos^2 \frac{\alpha}{2}$
8	$\operatorname{tg} \alpha$	2	$\sin 4\alpha$	$\frac{2}{\cos 2\alpha}$
9	$\cos \beta$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$
10	$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$

Вычисление тригонометрических выражений

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ + 2$
2	Вычислить: $\frac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ + \cos 65^\circ)}{\cos 20^\circ}$
3	Вычислить: $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ}$
4	Вычислить: $\frac{\left(\sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}\right)^2 - 1}{\sin \frac{4\pi}{5}}$
5	Вычислить: $\frac{\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12}}$
6	Вычислить: $\frac{1 + \cos 82^\circ - \cos^2 41^\circ}{\cos^2 41^\circ} - 1$
7	Вычислить: $\frac{\cos 85^\circ - \cos 35^\circ - \sqrt{3} \cos 65^\circ}{\sqrt{3} \sin 25^\circ}$
8	Вычислить: $\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ - 3$
9	Вычислить: $\frac{6 \sin 194^\circ + \cos 256^\circ}{\sin 14^\circ}$
10	Вычислить: $\frac{\sin 44^\circ + \cos 74^\circ}{2 \cos 14^\circ + 3 \sin 104^\circ}$

Вычисление тригонометрических выражений

Вариант 2

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\sin 49^\circ \cdot \sin 11^\circ + \cos^2 71^\circ + 2$
2	Вычислить: $\frac{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{\sqrt{2} \cos 85^\circ}$
3	Вычислить: $\frac{(1 + \operatorname{tg} 75^\circ) \cos 75^\circ}{2\sqrt{2} \sin 120^\circ}$
4	Вычислить: $\frac{\left(\sin \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{2\pi}{9}\right)^2 - 1}{\sin \frac{4\pi}{9}}$
5	Вычислить: $\frac{\cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8}}$
6	Вычислить: $\frac{1 + \sin 18^\circ - \cos^2 36^\circ}{2 \cos^2 36^\circ} + \frac{1}{2}$
7	Вычислить: $\frac{\cos 48^\circ + \cos 42^\circ + \sqrt{2} \cos 3^\circ}{\sqrt{2} \sin 87^\circ}$
8	Вычислить: $\cos^2 86^\circ + \cos^2 34^\circ - \cos^2 64^\circ + 2$
9	Вычислить: $\frac{6 \sin 251^\circ - 3 \cos 161^\circ}{\cos 19^\circ}$
10	Вычислить: $\frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{2\sqrt{2} \cos 46^\circ + \sqrt{2} \sin 44^\circ}$

Вычисление тригонометрических выражений

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\cos 51^\circ \cdot \cos 39^\circ + \cos^2 84^\circ + 3$
2	Вычислить: $\frac{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ) \cos 10^\circ}{2\sqrt{2} \sin 55^\circ}$
3	Вычислить: $(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \sin 14^\circ$
4	Вычислить: $\frac{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{8}}{\sin^2 \frac{\pi}{8}}$
5	Вычислить: $\frac{3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) - \sin \frac{\pi}{14} \right]}{\cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{14}}$
6	Вычислить: $\frac{\cos 2^\circ (1 + \operatorname{tg}^2 1^\circ)}{2(1 - \operatorname{tg}^2 1^\circ)}$
7	Вычислить: $\frac{\cos 9^\circ + \cos 51^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ}$
8	Вычислить: $\cos^2 23^\circ - \cos^2 7^\circ + \sin^2 53^\circ - 2$
9	Вычислить: $\frac{3 \sin 118^\circ + 9 \cos 28^\circ}{\sin 62^\circ}$
10	Вычислить: $\frac{\cos 71^\circ + \cos 49^\circ}{9 \cos 11^\circ - 5 \sin 79^\circ}$

Вычисление тригонометрических выражений

Вариант 4

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\cos 14^\circ \cdot \cos 46^\circ + \sin^2 16^\circ + 2$
2	Вычислить: $\frac{\cos 70^\circ + \sin 70^\circ}{\sqrt{2} \cos 25^\circ}$
3	Вычислить: $\frac{\operatorname{tg}^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{8 \operatorname{tg}^2 31^\circ \cdot \sin^2 31^\circ}$
4	Вычислить: $\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \right) \cos^2 \frac{\pi}{14}}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{7} \right)}$
5	Вычислить: $\frac{\cos^2 \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{10}}$
6	Вычислить: $2 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 14^\circ} \right)$
7	Вычислить: $\frac{8(1 + \cos 10^\circ + \cos 110^\circ)}{1 - \cos 130^\circ}$
8	Вычислить: $\frac{2 \cos^2 46^\circ + 2 \cos^2 106^\circ - 3}{\sin^2 76^\circ}$
9	Вычислить: $\frac{3 \cos 196^\circ + 12 \cos 164^\circ}{\cos 16^\circ}$
10	Вычислить: $\frac{3 \cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ}$

Вычисление тригонометрических выражений

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	1,25	1,25	3,5	2,75
2	2	1	0,5	1
3	-2	0,5	0,5	0,125
4	1	-1	2	0,5
5	2	2	10	-1
6	0	1	6	2
7	-2	2	1	8
8	1,5	2,5	-1,5	-2
9	-7	-3	12	-15
10	0,2	1/3	0,25	4

Вычисление тригонометрических функций

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
2	Вычислить: $\frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -1/2$
3	Вычислить: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, если $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$
4	Вычислить: $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos x$
5	Вычислить: $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -1/4$
6	Вычислить: $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$
7	Вычислить: $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
8	Вычислить: $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin \alpha = -0,4$
9	Вычислить: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$
10	Вычислить: $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$

Вычисление тригонометрических функций

Вариант 2

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
2	Вычислить: $\frac{3 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -4$
3	Вычислить: $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\sin x = \frac{1}{8}$
4	Вычислить: $\sin x$, если $\sin(x + 60^\circ) + \sin(x - 60^\circ) = -1$
5	Вычислить: $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$
6	Вычислить: $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2$
7	Вычислить: $\cos(\pi + 2\alpha)$, если $\sin \alpha = \sqrt{0,3}$
8	Вычислить: $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin \alpha = 0,2$
9	Вычислить: $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
10	Вычислить: $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

Вычисление тригонометрических функций

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
2	Вычислить: $\frac{\cos^2 \alpha + 2}{3 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$
3	Вычислить: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}$
4	Вычислить: $\sin x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = \sqrt{3}$
5	Вычислить: $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3/5$
6	Вычислить: $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -2$
7	Вычислить: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)$, если $\sin \alpha = -\sqrt{0,7}$
8	Вычислить: $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin \alpha = 0,8$
9	Вычислить: $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$
10	Вычислить: $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$

Вычисление тригонометрических функций

Вариант 4

№ задания	Задание
1	Вычислить: $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
2	Вычислить: $\frac{\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^4 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$
3	Вычислить: $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$, если $\cos x = -0,62$
4	Вычислить: $\sin x$, если $\sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5	Вычислить: $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,25$
6	Вычислить: $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$
7	Вычислить: $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha\right)$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$
8	Вычислить: $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin \alpha = -0,8$
9	Вычислить: $\frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \cos \alpha + \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$
10	Вычислить: $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$

Вычисление тригонометрических функций

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	-0,55	2,15	2,1	-10
3	0,75	0,125	0,5	0,62
4	2	-1	1	0,5
5	0,875	0,8	$\frac{15}{8}$	-0,875
6	$-\frac{4}{3}$	0,75	-0,75	-0,8
7	$\frac{1}{2}$	-0,4	0,4	-0,9
8	0,3	0,4	0,1	0,9
9	$\frac{1}{26}$	$-\frac{11}{14}$	-1,4	$-\frac{11}{5}$
10	3	1	-1	$-\sqrt{3}$

**Обратные тригонометрические функции
и простейшие тригонометрические уравнения**

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Вычислите: 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 2) $\operatorname{arctg}(\infty)$, 3) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 4) $\operatorname{arcctg}(1)$
2	Вычислите: $\arcsin\left(\frac{21}{4}\pi\right)$
3	Вычислите: $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}3\right)$
4	Вычислите: $\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$
5	Найти решение на указанном промежутке: $\operatorname{tg}(\pi(x-4)) = 0$; $3 < x < 6$
6	Найти решение на указанном промежутке: $\sqrt{3} + 2\cos\frac{\pi x}{9} = 0$; $8 < x < 20$
7	Решить уравнение: $\cos^2 x = \frac{1}{2}$
8	Решить уравнение: $\sin 2x = \sin 3x$
9	Найти решение на указанном промежутке: $\cos 3x = \sin 2x$; $75^\circ < x < 150^\circ$
10	Решить уравнение: $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

**Обратные тригонометрические функции
и простейшие тригонометрические уравнения**

Вариант 2

№ задания	Задание
1	Вычислите: 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 2) $\operatorname{arctg}(-\infty)$, 3) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 4) $\operatorname{arcctg}(-1)$
2	Вычислите: $\arccos\left(\frac{39}{10}\pi\right)$
3	Вычислите: $\sin(\operatorname{arcctg}(-2))$
4	Вычислите: $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3 - \operatorname{arctg}6)$
5	Найти решение на указанном промежутке: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0; 1 < x < 5$
6	Найти решение на указанном промежутке: $1 + 2\sin\frac{\pi x}{3} = 0; 2 < x < 4$
7	Решить уравнение: $\sin^2 x = \frac{3}{4}$
8	Решить уравнение: $\cos\frac{x}{3} = \cos 2x$
9	Найти решение на указанном промежутке: $\sin 2x + \cos 3x = 0; 0^\circ < x < 90^\circ$
10	Решить уравнение: $5\sin^2 x = 2 - \cos^2 x$

**Обратные тригонометрические функции
и простейшие тригонометрические уравнения**

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Вычислите: 1) $\operatorname{arctg}(-1)$, 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, 3) $\arccos(0)$, 4) $\operatorname{arcctg}(\sqrt{3})$
2	Вычислите: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}10)$
3	Вычислите: $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$
4	Вычислите: $\cos\left(2\operatorname{arctg}1 - \arccos\frac{5}{13}\right)$
5	Найти решение на указанном промежутке: $\cos\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right)=1; 0 < x < 9$
6	Найти решение на указанном промежутке: $1 + 2\cos\frac{\pi x}{15} = 0; 5 < x < 20$
7	Решить уравнение: $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$
8	Решить уравнение: $\sin 4x + \sin 3x = 0$
9	Найти решение на указанном промежутке: $\cos 4x + \sin 2x = 0; 90^\circ < x < 180^\circ$
10	Решить уравнение: $5 - 4\sin^2 x = 5\cos^2 x$

**Обратные тригонометрические функции
и простейшие тригонометрические уравнения**

Вариант 4

№ задания	Задание
1	Вычислите: 1) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$, 2) $\operatorname{arctg}(1)$, 3) $\arcsin(-1)$, 4) $\arccos(1)$
2	Вычислите: $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 3)$
3	Вычислите: $\operatorname{tg}(2\operatorname{arccotg} 3)$
4	Вычислите: $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} - \arccos \frac{3}{5}\right)$
5	Найти решение на указанном промежутке: $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-3)\right) = 1; 3 < x < 9$
6	Найти решение на указанном промежутке: $1 + \sqrt{2}\cos \frac{\pi x}{8} = 0; 3 < x < 10$
7	Решить уравнение: $\sin^2 3x = \frac{1}{4}$
8	Решить уравнение: $\cos 2x + \cos 5x = 0$
9	Найти решение на указанном промежутке: $\sin 5x + \cos 4x = 0; 270^\circ < x < 360^\circ$
10	Решить уравнение: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

**Обратные тригонометрические функции
и простейшие тригонометрические уравнения**

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	1) $\frac{3}{4}\pi$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{4}$	1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{3}{4}\pi$	1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) 0
2	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{7}{2}\pi - 10$	$\frac{\pi}{2} - 3$
3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{120}{169}$	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{7}{8}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{3 - 8\sqrt{2}}{15}$
5	4; 5	2; 4	1; 7	4; 8
6	10,5	3,5	10	6
7	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$	$\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$	$\pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$
8	$2\pi n$; $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$	$\frac{6\pi k}{7}$; $\frac{6\pi n}{5}$	$\frac{2\pi k}{7}$; $\pi + 2\pi k$	$\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$
9	90°	54°	105° 165°	310° 350°
10	$\frac{\pi}{4} + 2\pi k$	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$	πk	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

Тригонометрические уравнения и неравенства
Вариант 1

№ задания	Задание
1	Решить уравнение: $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$
2	Решить уравнение: $2 \sin x \sin 8x = \cos 7x$
3	Решить уравнение: $8 \cos^4 x = 11 \cos 2x - 1$
4	Решить уравнение: $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$
5	Решить уравнение: $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{2} \sin 12x$
6	Решить уравнение: $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$
7	Указать количество корней на промежутке: $(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) \cdot \sin 2x = 0 \quad (100^\circ; 300^\circ)$
8	Решить неравенство: $\sin x > \frac{1}{2}$
9	Решить неравенство: $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
10	Решить неравенство: $\operatorname{tg} x > 1$

Тригонометрические уравнения и неравенства**Вариант 2**

№ задания	Задание
1	Решить уравнение: $\sin 2x + \cos 2x = -1$
2	Решить уравнение: $2 \sin 2x \cos x = \sin 3x$
3	Решить уравнение: $9 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \sin^2 x = 6$
4	Решить уравнение: $\sin^2 \frac{x}{3} + \sin^2 \frac{4x}{9} = \sin^2 \frac{5x}{9} + \sin^2 \frac{2x}{3}$
5	Решить уравнение: $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x$
6	Решить уравнение: $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$
7	Указать количество корней на промежутке: $(\operatorname{tg} x + 1) \cdot \sin 2x = 0$ ($-50^\circ; 300^\circ$)
8	Решить неравенство: $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
9	Решить неравенство: $\cos x > -\frac{1}{2}$
10	Решить неравенство: $\operatorname{tg} x < -1$

Тригонометрические уравнения и неравенства
Вариант 3

№ задания	Задание
1	Решить уравнение: $\sin \frac{x}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{6} + 1 = 0$
2	Решить уравнение: $2 \cos x \cos 4x = \cos 3x$
3	Решить уравнение: $8 \sin^4 x + 13 \cos 2x = 7$
4	Решить уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$
5	Решить уравнение: $\sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{8}$
6	Решить уравнение: $2 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$
7	Указать количество корней на промежутке: $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \cdot \sin 2x = 0 \quad (-90^\circ; 280^\circ)$
8	Решить неравенство: $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
9	Решить неравенство: $\cos x < \frac{1}{2}$
10	Решить неравенство: $\operatorname{ctg} x \geq 1$

Тригонометрические уравнения и неравенства
Вариант 4

№ задания	Задание
1	Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 1$
2	Решить уравнение: $\operatorname{tg}(60^\circ + x) + \operatorname{tg} x = 0$
3	Решить уравнение: $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$
4	Решить уравнение: $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$
5	Решить уравнение: $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$
6	Решить уравнение: $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$
7	Указать количество корней на промежутке: $(\operatorname{ctg} x - 1) \cdot \sin 2x = 0 \quad (-100^\circ; 250^\circ)$
8	Решить неравенство: $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
9	Решить неравенство: $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$
10	Решить неравенство: $\operatorname{ctg} x \geq -1$

Тригонометрические уравнения и неравенства				Ответы
№ варианта № задания	1	2	3	
1	$\pm \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$	$\frac{\pi}{8} \pm \frac{3\pi}{8} + \pi k$	$\pm 4\pi + \pi(12k+1)$	
2	$\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$	πk	$\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$	
3	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$	
4	$\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi k}{5}$	$\frac{9\pi k}{2}$ $\frac{9\pi}{2} + 9\pi n$	$\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$	
5	$\frac{\pi k}{8};$ $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};$ $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$	$\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2};$ $\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$	
6	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$ $\arctg \frac{3}{4} + \pi k$	$-\frac{\pi}{4} + \pi k$ $\arctg 3 + \pi n$	$\frac{\pi}{4} + \pi k$ $-\arctg \frac{3}{2} + \pi n$	
7	5	4	4	
8	$2\pi n + \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$	$2\pi n + \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3} + 2\pi n$	$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{9\pi}{4} + 2\pi n$	
9	$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$	$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$	
10	$\pi n + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$0 + \pi n < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$	

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ К РАЗДЕЛУ 8

ТЕСТ 1

№ задания	Задание
1	Верно ли, что $\sin 3 > 0$?
2	Верно ли, что $\sqrt{2} - \sin \sqrt{2} > 0$?
3	Верно ли, что произведение $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ есть число рациональное?
4	Верно ли, что $\sin 1 + \sin(\pi + 1) = 0$?
5	Верно ли, что $(\operatorname{tg} 1) \cdot (\operatorname{tg} \pi) = 0$?
6	Верно ли, что $\arccos \frac{1}{2} + \arcsin(-1) = \pi$?
7	Верно ли, что $\sin 1^\circ + \sin 89^\circ = 1$?
8	Верно ли, что $\arccos(\cos(-1)) = -1$?
9	Верно ли, что $\arccos(\sin 0) = 0$?
10	Верно ли, что $\cos 60^\circ - \cos 120^\circ = 1$?
11	Верно ли, что $\frac{1 + \cos 4}{\cos^2 2} = 2$?
12	Верно ли равенство $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcctg} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$?
13	Верно ли равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $ x \leq 1$?
14	Существует ли такое значение x , при котором верно равенство $\sin \pi x = \pi$?
15	Существует ли такое значение x , при котором верно равенство $\cos x^2 = \sqrt{2} - 2$?
16	Существует ли такое значение x , при котором $3 \cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x}$?
17	Существует ли такое значение x , при котором $1 + \sin 2x = 2 \sin^2 x$?
18	Существует ли такое $x \neq 0$, при котором верно равенство $\operatorname{arctg} x + x = 0$?

19	Существуют ли такие числа x и y , что выполняется равенство $\operatorname{tg} x = \frac{1}{y}$?
20	Существуют ли неравные отличные от нуля числа x, y , при которых верно равенство $\cos x + \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$?
21	Верно ли неравенство $\sin \frac{7\pi}{6} > \sin 5$?
22	Верно ли неравенство $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} < 1$?
23	Верно ли, что число $\frac{1}{\cos^2 135^\circ}$ есть неправильная дробь?
24	Верно ли неравенство $\frac{2 \sin 2 \cdot \cos 1 - \sin 3}{\sin 1} > 1$?
25	Верно ли неравенство $\frac{\operatorname{tg} 0,4 + \operatorname{tg} 0,6}{\operatorname{tg} 1} > 1$?
26	Верно ли неравенство $\sin 1 + \operatorname{tg} 1 > 1$?
27	Верно ли неравенство $\operatorname{ctg} 2 \cdot \operatorname{ctg} 3 > 1$?
28	Верно ли неравенство $2 \arcsin \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$?
29	Верно ли неравенство $\sin 44^\circ > \cos 44^\circ$?
30	Верно ли неравенство $(\operatorname{arctg} 0,1)^2 > \operatorname{arctg} 0,1$?
31	Верно ли неравенство $\arcsin^2(-0,9) > \arcsin 0,9$?
32	Существует ли такое значение x , при котором верно неравенство $1 + 5 \sin x < 0$?
33	Существует ли такое положительное x , при котором верно неравенство $(1 - \cos x)^3 \geq 2$?
34	Верно ли, что если $\cos x = \frac{1}{3}$, то $\sin x > 0$?
35	Верно ли, что если $\sin x > \cos y$, $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, \pi)$, то $\cos x > \cos y$?

36	Верно ли, что число 1 является наибольшим значением выражения $\frac{\sin x + 2}{3}$?
37	Верно ли, что существует значение x , при котором выполняется равенство $\frac{\sin x + \cos x}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}} = 4$?
38	Верно ли, что уравнение $\arcsin x = \sqrt{2}$ имеет единственное решение?
39	Верно ли, что уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -1$ имеет единственное решение?
40	Верно ли, что уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ имеет единственное решение на отрезке $[0, 2\pi]$?

ТЕСТ 1

№ задания	Задание
1	Верно ли, что $\sin\left(\frac{2}{\pi}\right) > 0$?
2	Верно ли, что $\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{2} > 0$?
3	Верно ли, что сумма $\operatorname{tg}15^\circ + \operatorname{ctg}15^\circ$ есть число рациональное?
4	Верно ли, что $\sin 2 - \sin 2\pi = 0$?
5	Верно ли, что $\operatorname{tg}1 + \operatorname{tg}2 = 0$?
6	Верно ли, что $\operatorname{arctg}(-\pi) + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi$?
7	Верно ли, что $(\cos 1^\circ) \cdot (\cos 89^\circ) = 1$?
8	Верно ли, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-1)) = -1$?
9	Верно ли, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi) = 0$?
10	Верно ли, что $\cos \pi + 2 \cos \frac{\pi}{2} = 1$?
11	Верно ли, что $\frac{\sin 4}{\cos 2} = 2$?
12	Верно ли равенство $\arccos \frac{1}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$?
13	Верно ли равенство $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}(-x) = 0$, если $ x \leq 1$?
14	Существует ли такое значение x , при котором верно равенство $\cos \sqrt{x} = \sqrt{2}$?
15	Существует ли такое значение x , при котором верно равенство $\operatorname{tg} \frac{1}{x} = \pi$?
16	Существует ли такое значение x , при котором $\sin^2 x = \cos^2 x + \sin 2x$?
17	Существует ли такое значение x , при котором $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} 2x$?
18	Существует ли такое $x \neq 0$, при котором верно

	равенство $\arcsin x - x = 0$?
19	Существуют ли такие числа x и y , что выполняется равенство $\operatorname{ctg}(xy) = y$?
20	Существуют ли неравные отличные от нуля числа x, y , при которых верно равенство $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$?
21	Верно ли неравенство $\sin \frac{2\pi}{3} > \sin \frac{3\pi}{4}$?
22	Верно ли неравенство $\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} > 1$?
23	Верно ли, что число $1 - \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} \right)$ есть неправильная дробь?
24	Верно ли неравенство $\frac{\sin 3}{2 \cos 2 \cdot \cos 1 - \cos 1} > 1$?
25	Верно ли неравенство $\frac{\operatorname{tg} 1 + \operatorname{ctg} 1}{2} > 1$?
26	Верно ли неравенство $\frac{\operatorname{ctg} 1}{\operatorname{tg} 1} > 1$?
27	Верно ли неравенство $\operatorname{ctg} 1,5 + \operatorname{ctg} 1,6 > 1$?
28	Верно ли неравенство $\arcsin \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$?
29	Верно ли неравенство $\sin \frac{\pi}{7} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$?
30	Верно ли неравенство $(\operatorname{arctg} 10)^2 > \operatorname{arctg} 10$?
31	Верно ли неравенство $\arccos^2 0,9 > \arccos 0,9$?
32	Существует ли такое значение x , при котором верно неравенство $1 + \cos 10x < 0$?
33	Существует ли такое положительное x , при котором верно неравенство $(1 + \sin x)^2 > 1$?
34	Верно ли, что если $\cos x = \frac{1}{3}$, то $\cos 2x < 0$?
35	Верно ли, что если $\cos x > \cos y$, $x \in (0, \pi)$,

	$y \in (0, \pi)$, то $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} y$?
36	Верно ли, что число 1 является наибольшим значением выражения $\frac{1}{1 + \cos x}$?
37	Верно ли, что существует значение x , при котором выполняется равенство $3 \cos x - 4 \cos 3x = -1$?
38	Верно ли, что уравнение $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1$ имеет единственное решение?
39	Верно ли, что уравнение $\arccos x = \arcsin x$ имеет единственное решение?
40	Верно ли, что уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ имеет единственное решение на отрезке $[0, 2\pi]$?

Ответы к тестам

Тест 1				Тест 2			
№ задания	ответ	№ задания	ответ	№ задания	ответ	№ задания	ответ
1	да	21	да	1	да	21	да
2	да	22	да	2	нет	22	да
3	да	23	да	3	да	23	да
4	да	24	нет	4	нет	24	нет
5	да	25	нет	5	нет	25	да
6	нет	26	да	6	нет	26	нет
7	нет	27	да	7	нет	27	нет
8	нет	28	да	8	да	28	да
9	нет	29	нет	9	да	29	нет
10	да	30	нет	10	нет	30	да
11	да	31	да	11	нет	31	нет
12	да	32	да	12	нет	32	нет
13	да	33	да	13	да	33	да
14	нет	34	нет	14	нет	34	да
15	да	35	нет	15	да	35	нет
16	да	36	да	16	да	36	нет
17	да	37	нет	17	да	37	да
18	нет	38	да	18	нет	38	да
19	да	39	нет	19	да	39	да
20	да	40	нет	20	да	40	да

9 ПЛАНИМЕТРИЯ

9.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Обозначения:

a, b, c – стороны треугольника;

α, β, γ или $\angle A, \angle B, \angle C$ – углы треугольника;

h_a, h_b, h_c – высоты треугольника, опущенные на стороны a, b, c ;

S – площадь треугольника;

$P = a + b + c$ – периметр треугольника;

$p = P/2$ – полупериметр треугольника;

R – радиус окружности, описанной около треугольника;

r – радиус окружности, вписанной в треугольник.

ТРИ ПРИЗНАКА РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Два треугольника равны, если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника.

2. Два треугольника равны, если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника.

3. Два треугольника равны, если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

ТРИ ПРИЗНАКА ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника.

2. Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны.

3. Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Сумма углов треугольника равна 180° .
2. Сумма длин любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.
3. Средняя линия треугольника параллельна стороне и равна её половине.
4. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.
5. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла – большая сторона. Против равных сторон лежат равные углы, против равных углов – равные стороны.
6. В равностороннем треугольнике все углы равны.
7. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной в треугольник окружности.
2. Три перпендикуляра, проведенных из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной около треугольника окружности.
3. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от соответствующих вершин треугольника.
4. Три высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКАХ

1. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

2. Теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

3. Площадь треугольника

$$S = \frac{ah_a}{2}, \quad S = \frac{ab \sin C}{2}, \quad S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \text{формула Герона.}$$

4. В равностороннем треугольнике

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad r = \frac{a \sqrt{3}}{6}, \quad R = \frac{a \sqrt{3}}{3}.$$

5. В прямоугольном треугольнике ($a^2 + b^2 = c^2$), длина высоты, опущенной на гипотенузу c , есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Если на одной из сторон угла от его вершины последовательно отложить равные отрезки и через концы этих отрезков провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отсекаются также равные отрезки.

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1. Площадь параллелограмма

$$S = ah_a, \quad S = ab \sin A,$$

где a и b – смежные стороны,

A – угол между ними,

h_a – высота, опущенная на сторону a .

2. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

3. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Площадь трапеции

$$S = \frac{a+b}{2}h,$$

где a и b – основания, h – высота трапеции.

СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТИ, КРУГА СЕКТОРА И СЕГМЕНТА

Сектор – часть круга, ограниченная двумя радиусами.

Сегмент – часть круга, заключенная между дугой окружности и стягивающей ее хордой.

1. Длина окружности $L = 2\pi R$.

2. Площадь круга $S = \pi R^2$.

3. Радианной мерой угла AOB называется число α равное отношению длины дуги окружности AMB к ее радиусу R .

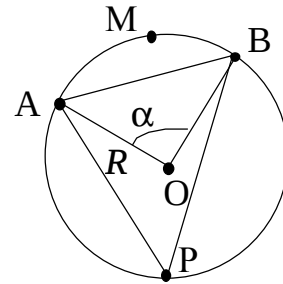
2. Вписанный угол APB измеряется половиной дуги окружности AMB , на которую он опирается.

3. Длина дуги сектора $L_{AMB} = R\alpha$.

4. Площадь сектора $S_{OAMB} = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

5. Площадь сегмента равна разности площадей сектора и треугольника

$$S_{AmB} = S_{OAMB} - S_{OAB}.$$



СВОЙСТВА КАСАТЕЛЬНЫХ, ХОРД И СЕКУЩИХ

1. Радиус R , проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.
2. Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей. Диаметр, перпендикулярный хорде, проходит через её середину.
3. Если две хорды пересекаются, то произведения длин отрезков, на которые точка пересечения делит каждую из хорд, равны.
4. Отрезки касательных, проведенных к окружности из точки, лежащей вне неё, равны.
5. Квадрат длины касательной равен произведению длины секущей на её внешнюю часть.
6. Центры касающихся окружностей и точка их касания лежат на одной прямой.
7. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма двух его противоположных углов равна 180° , и наоборот.
8. Произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).
9. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны, и наоборот.

9.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 12 м, а одна из сторон на 3 м больше другой. Найдите стороны треугольника.

Решение.

Обозначим через x одну из сторон треугольника. Тогда $x + x + (x + 3) = 12$ или $x + (x + 3) + (x + 3) = 12$. Эти уравнения имеют решения $x = 3$ или $x = 2$. Из отрезков 3, 3, 6 не составить треугольника, поэтому стороны равны 5; 5; 2.

Ответ: 5; 5; 2 м.

2. В равнобедренном остроугольном треугольнике один угол в четыре раза больше другого. Найдите наибольший угол треугольника.

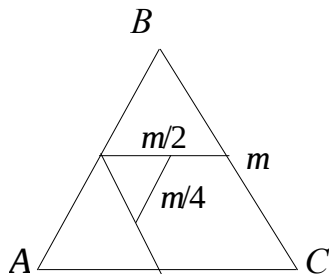
Решение.

Углы равны 30° , 30° , 120° или 80° , 80° , 20° . Но в первом случае треугольник имеет тупой угол.

Ответ: 80° .

3. Найдите длину отрезка, соединяющего середины средних линий равностороннего треугольника со стороной m .

Решение.

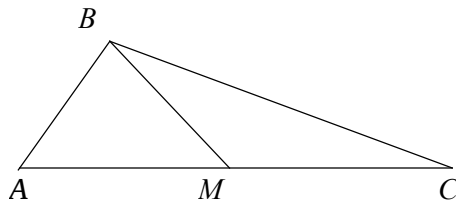


Треугольник, образованный средними линиями, является правильным со стороной $m/2$. Средняя линия этого треугольника равна $m/4$.

Ответ: $m/4$

4. Треугольник, периметр которого равен 15 см, делится медианой на два треугольника с периметрами 11 см и 14 см. Найти длину медианы.

Решение.



$$\begin{aligned} P_{ABM} + P_{BMC} &= \\ &= (AB + BM + MA) + (BC + CM + MB) = \\ &= AB + BC + (CM + CA) + 2BM = \\ &= P_{ABC} + 2BM. \end{aligned}$$

Поэтому $BM = (P_{ABM} + P_{BMC} - P_{ABC})/2 = (11 + 14 - 15)/2 = 5$.

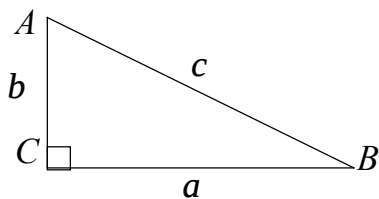
Ответ: 5 см.

5. Стороны треугольника относятся как 3 : 5 : 7, а периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, равен 30 см. Найдите периметр и длины сторон данного треугольника.

Ответ: 60; 12; 20; 28 см.

6. В прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы на 1 см, но больше другого катета на 7 см. Определите стороны треугольника.

Решение.



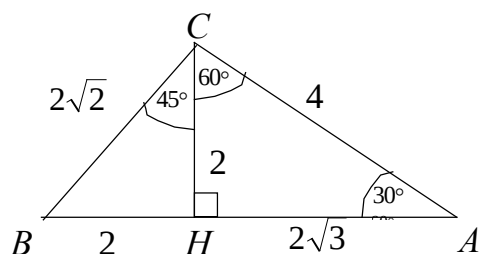
$$\begin{aligned} (b - 7)^2 + b^2 &= (b + 1)^2 \Leftrightarrow \\ b^2 - 16b + 48 &= 0. \text{ Значение } b = 4 - \\ &\text{не удовлетворяет условию задачи, т.к.} \\ a = b - 7 &\text{ не может быть отрицательным.} \end{aligned}$$

Следовательно, $b = 12$, $a = b - 7 = 5$ и $c = b + 1 = 13$.

Ответ: 5 см, 12 см, 13 см.

7. Из угла 105° треугольника опущена высота, образующая угол 45° со стороной длиной $2\sqrt{2}$ м. Найдите стороны треугольника.

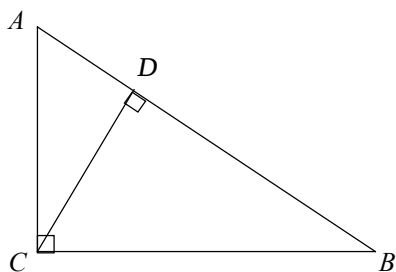
Решение.



Ответ: $2\sqrt{2}$; 4; $2 + 2\sqrt{3}$ см.

7. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16 см.

Решение.



Дано: $AD = 9$, $BD = 16$.

$$CD = \sqrt{BD \cdot DA} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12.$$

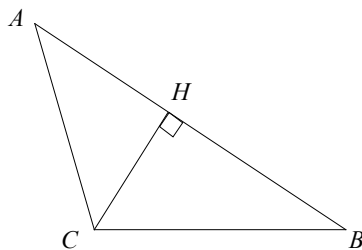
$$AB = AD + BD = 25.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 25 = 150.$$

Ответ: 150 м^2 .

8. В треугольнике две стороны равны 17 см и 25 см, высота делит третью сторону на отрезки, разность которых равна 12 см. Найти периметр треугольника.

Решение.



Обозначим $CH = h$ и $AH = x$. Тогда $BH = x + 12$.

$$\begin{cases} h^2 + (x + 12)^2 = 25^2 \\ h^2 + x^2 = 17^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$24x + 144 = 25^2 - 17^2 \Rightarrow x = 8.$$

Тогда $P = 25 + 17 + (x + 12) + x = 70$.

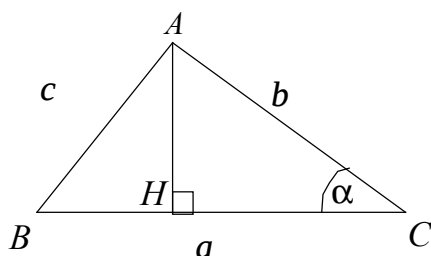
Ответ: 70 см.

9. Докажите, что в произвольном треугольнике стороны a, b, c связаны равенством $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (теорема косинусов).

Решение.

Рассмотрим случай, когда точка H расположена между точками B и C .

$AH = b \cdot \cos C$; $CH = b \cdot \sin C$; $BH = a - b \cdot \sin C$. По теореме Пифагора для



треугольника ABC получаем

$$c^2 = (b \cdot \cos C)^2 + (a - b \cdot \sin C)^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 \cdot \cos^2 C + a^2 + b^2 \cdot \sin^2 C - 2 \cdot a \cdot b \sin C \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C.$$

10. В треугольнике ABC сторона AB равна 4 м, а также известны $\cos B = 1/2$, $\sin C = 2/3$. Найдите длину стороны AC .

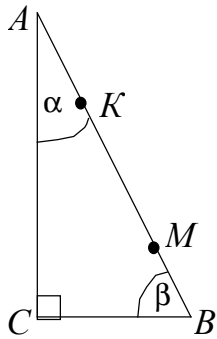
Решение.

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{4\sqrt{1 - (1/2)^2}}{2/3} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}$ м.

11. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны 4 и 3 см. Точки K и M делят гипотенузу AB в отношении $1 : 3 : 1$. Найдите длины сторон CK и CM .

Решение.



По условию $AC = 4$; $CB = 3$. Тогда

$\cos \alpha = 4/5$; $\cos \beta = 3/5$. По теореме Пифагора

$AB = 5$; тогда $AK = BM = 1$. По теореме косинусов

$$CK^2 = AC^2 + AK^2 - 2 \cdot AC \cdot AK \cdot \cos \alpha =$$

$$= 16 + 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4/5 = 10,6.$$

$$CM^2 = CB^2 + BM^2 - 2 \cdot CB \cdot BM \cdot \cos \beta =$$

$= 9 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3/5 = 6,4$. Следовательно, $CK \approx 3,26$ и $CM \approx 2,53$.

Ответ: 3,49 см, 2,28 см.

12. В треугольнике ABC угол C равен 60° , $AC = 8$ м, $AB = 13$ м. Найдите третью сторону треугольника.

Решение.

$$13^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow x^2 - 8x - 105 = 0 \Rightarrow x = 15 \text{ или } x = -7.$$

Ответ: 15 м.

13. В треугольнике ABC угол C тупой, $AC = 3$, $BC = 13$, $\sin C = 5/13$. Найти длину стороны AB .

Решение.

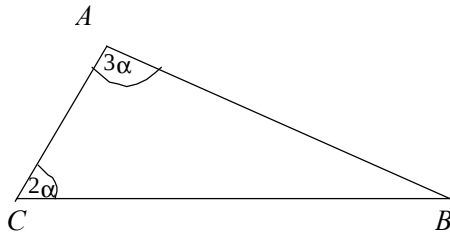
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C = 13^2 + 3^2 + 2 \cdot 13 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = 250.$$

Ответ: $5\sqrt{10}$ см.

14. В треугольнике ABC угол A относится к углу C как 3:2, $AB = 28$ см,

$BC = 33$ см. Найдите $\cos \frac{C}{2}$

Решение.



$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{BC}{\sin 3\alpha} \Leftrightarrow \frac{28}{2 \sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{33}{\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{\cos \alpha} = \frac{33}{2 \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \Rightarrow$$

$56 \cos^2 \alpha - 33 \cos \alpha - 14 = 0$. Откуда находим

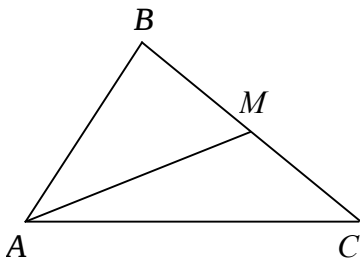
$$\cos \alpha = \frac{33 \pm \sqrt{1089 + 3136}}{112} = \frac{33 \pm 65}{112} = \begin{bmatrix} 7/8 \\ -2/7 \end{bmatrix}.$$

Если бы $\cos \alpha$ был отрицательным, то $\alpha > 90^\circ$ и $2\alpha > 180^\circ$, что невозможно. Следовательно, $\cos \alpha = 7/8$.

Ответ: $7/8$.

15. В треугольнике ABC угол B равен 60° , а сторона BC и медиана AM равны 10 и 7 м соответственно. Найдите периметр треугольника.

Решение.



Пусть $AB = x$. Тогда $7^2 = x^2 + 25 - 5x$

(теорема косинусов для треугольника ABM).

Следовательно, $x = 8$. Применяя теорему

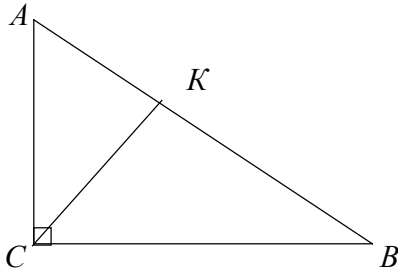
косинусов для треугольника ABC , получим

$$AC^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 / 2 = 84 \text{ и } AC = \sqrt{84}.$$

Ответ: $\sqrt{84}$ м.

16. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 21 м, а биссектриса прямого угла равна $12\sqrt{2}$. Найдите периметр треугольника.

Решение.



$$AC = 21, CK = 12\sqrt{2}, \angle ACK = 45^\circ.$$

$$AK^2 = 21^2 + (12\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 21 \cdot 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 225 \text{ (теорема косинусов) и } AK = 15.$$

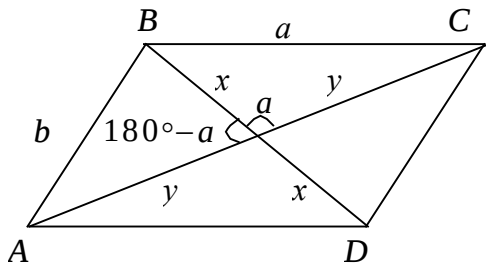
$$\sin A = CK \cdot \sin 45^\circ / AK = 4/5 \text{ (теорема синусов). Тогда } \cos A = 3/5 \text{ и } \operatorname{tg} A = 4/3.$$

$$P = AC + AC \cdot \operatorname{tg} A + AC / \cos A = 21(1 + 5/3 + 4/3) = 84.$$

Ответ: 84 м.

17. Докажите, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

Решение.



$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha;$$

$$b^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha.$$

Складывая, получаем

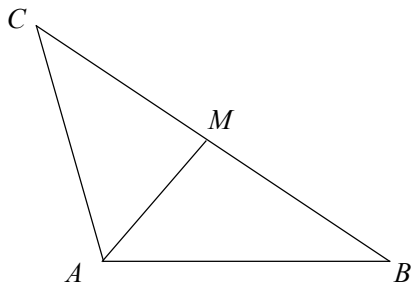
$$a^2 + b^2 = 2x^2 + 2y^2 \text{ или}$$

$$a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = (2x)^2 + (2y)^2.$$

18. Докажите, что длина медианы угла A треугольника может быть вычислена по формулам:

$$AM = \sqrt{\frac{BC^2}{4} + AB^2 - BC \cdot AB \cdot \cos B} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AC^2 - BC^2}.$$

Решение.



По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos B;$$

$$AM^2 = AB^2 + BC^2/4 - BC \cdot AB \cdot \cos B =$$

$$= AB^2 + BC^2/4 + (AC^2 - AB^2 - BC^2)/2 =$$

$$= AB^2/2 + AC^2/2 - BC^2/4.$$

19. Найдите площадь равностороннего треугольника, длина стороны которого равна a см.

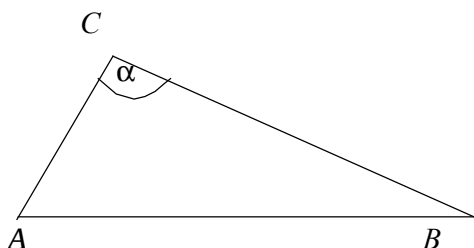
Решение.

$$h = a \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = a h / 2 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ см.

20. Площадь треугольника равна 16 см^2 . Найдите длину стороны AB , если $AC = 5 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$ и угол C тупой.

Решение.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot BC} = \frac{32}{5 \cdot 8} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5},$$

т.к. $\cos \alpha < 0$ при $\pi/2 < \alpha < \pi$. По теореме косинусов

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \alpha = \\ &= 25 + 64 + 48 = 137 \Rightarrow AC = \sqrt{137}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{137}$ см.

21. Площадь треугольника равна $\sqrt{14} \text{ м}^2$, стороны относятся как $3 : 5 : 6$. Найдите длины высот треугольника.

Решение.

Пусть стороны треугольника равны $3x$, $5x$ и $7x$. Тогда

$p = (3x + 5x + 7x)/2 = 7x$. По формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{7x \cdot 4x \cdot 2x \cdot x} = \sqrt{14}, \text{ следовательно,}$$

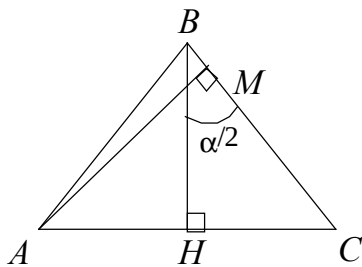
$$x = 2. \text{ Площадь треугольника } S = ah_a/2, \text{ а высоты } h_1 = \frac{2\sqrt{14}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{14}}{5},$$

$$h_2 = \frac{2\sqrt{14}}{5 \cdot 2} = \frac{\sqrt{14}}{5} \text{ и } h_3 = \frac{2\sqrt{14}}{7 \cdot 2} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{\sqrt{14}}{5}, \frac{\sqrt{14}}{7} \text{ м.}$$

22. Площадь равнобедренного треугольника равна S , угол при вершине равен α . Найдите длины высот треугольника.

Решение.



По условию $AB = BC$. Из равенства

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha \text{ следует, что}$$

$$AB = BC = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}.$$

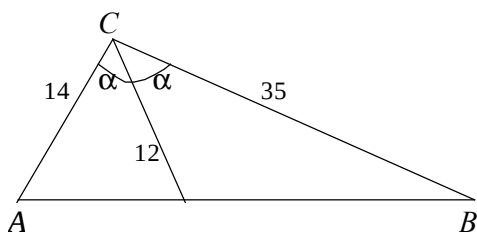
$$\begin{aligned} \text{Пусть } BK \text{ и } AM \text{ — высоты треугольника. Тогда } AM &= AB \sin \alpha = \\ &= \sqrt{2S \cdot \sin \alpha}; BH = AB \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{S \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{2S \cdot \sin \alpha}; \sqrt{2S \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

23. Стороны треугольника равны 35 и 14 см, а длина биссектрисы угла между ними равна 12. Найдите третью сторону и площадь треугольника.

Решение.

$$2S_{ABC} = 12 \cdot 14 \cdot \sin \alpha + 12 \cdot 35 \cdot \sin \alpha = 35 \cdot 14 \cdot \sin 2\alpha \quad \Rightarrow$$



$$548 \cdot \sin \alpha = 490 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = 21/35 \Rightarrow$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -0,28 \Rightarrow$$

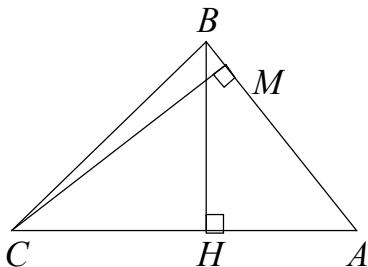
$$\sin 2\alpha = 0,96.$$

По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 2\alpha =$
 $= 196 + 1225 - 2 \cdot 14 \cdot 35 \cdot (-0,28) = 1695,4 \Rightarrow AC \approx 41,18.$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 14 \cdot \sin 2\alpha = 235,2.$$

24. Найдите длины сторон AB и BC треугольника ABC , если $BC = 5$ см, а длины высот, проведенных к сторонам AB и AC равны соответственно $\frac{4\sqrt{14}}{3}$ и $\frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Решение.



$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH \Rightarrow$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CM}{BH} = 2 \Rightarrow AC = 2AB.$$

Обозначим $AB = x$. Тогда $S = \frac{2\sqrt{14}}{3}x,$

$$p = (5 + 2x + x)/2 = (5 + 3x)/2. \text{ По формуле Герона}$$

$$\frac{2\sqrt{14}}{3}x = \sqrt{\frac{5+3x}{2} \cdot \frac{5+x}{2} \cdot \frac{5-x}{2} \cdot \frac{3x-5}{2}} \Rightarrow$$

$$16 \cdot 4 \cdot 14 \cdot x^2 = 9 \cdot (-9x^4 + 25^2 - 250x^2) \Rightarrow$$

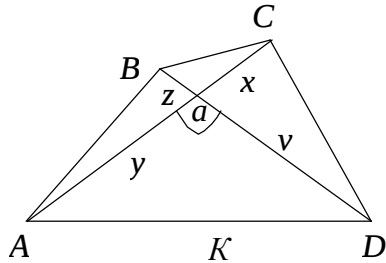
$$81x^4 - 1354x^2 + 5625 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{677 \pm \sqrt{677^2 - 81 \cdot 5625}}{81} = \frac{677 \pm \sqrt{2704}}{81} = \frac{677 \pm 52}{81} = \left[\frac{25}{9} \right].$$

Ответ: $5/3$ и $10/3$ см или 3 и 6 см.

25. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

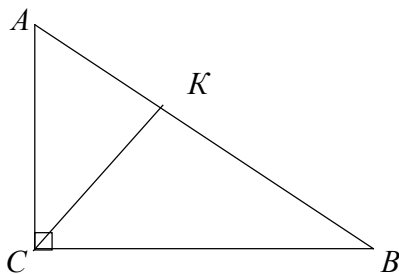
Решение.



$$\begin{aligned} 2S &= z \cdot x \cdot \sin \alpha + x \cdot v \cdot \sin \alpha + \\ &+ v \cdot y \cdot \sin \alpha + y \cdot z \cdot \sin \alpha = \\ &= (x + y) \cdot (z + v) \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

26. Биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20 см. Найдите длины катетов.

Решение.

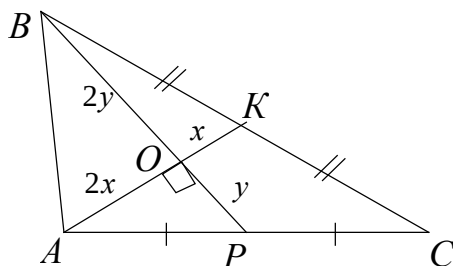


$$\begin{aligned} BK &= 20, KA = 15, BA = BK + KC = 35. \\ \frac{CB}{AC} &= \frac{BK}{KA} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} CB = 4x \\ AC = 3x \end{cases} \\ (4x)^2 + (3x)^2 &= 35^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 35^2 \Rightarrow \\ x &= 7; AB = 28, AC = 21. \end{aligned}$$

Ответ: 28 см; 21 см.

27. Две стороны треугольника равны 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

Решение.



Пусть $AK = 3x$, $BP = 3y$, тогда

$KO = 2x$; $OK = x$; $BO = 2y$; $OP = y$

(свойство медиан). По теореме Пифагора

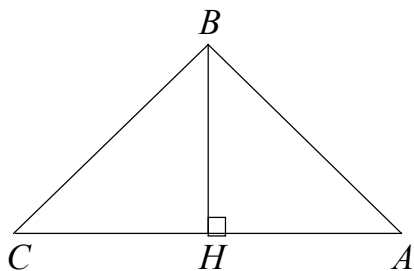
$$\begin{cases} x^2 + (2y)^2 = 3^2 \\ (2x)^2 + y^2 = 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{33}/3 \\ y = 2\sqrt{3}/3 \end{cases}.$$

$$AB = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 33}{9} + \frac{16 \cdot 3}{9}} = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\sqrt{5}$ см.

28. В равнобедренном треугольнике один из углов равен 120° , а длина основания равна $2\sqrt{3}$. Найдите длину высоты, опущенной на боковую сторону.

Решение.



$$AH = \sqrt{3}, AB = 2, BH = 1.$$

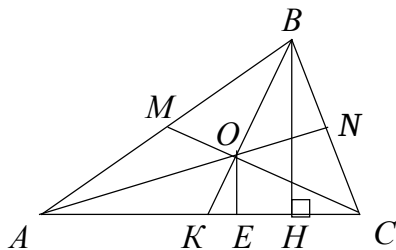
$$S = AC \cdot BH / 2 = \sqrt{3}.$$

$$S = AB \cdot h / 2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{3}/2$.

29. Основание треугольника равно 26 см. Медианы боковых сторон равны 30 см и 39 см. Найдите площадь треугольника.

Решение.



По условию $AC = 20$, $CM = 30$,

$$AN = 39. AO = \frac{2}{3}AN = 26;$$

$$CO = \frac{2}{3}CM = 20 \text{ (свойство медиан).}$$

$$\text{Тогда } p = (26 + 26 + 20)/2 = 36.$$

$$S_{AOC} = \sqrt{p(p-26)(p-26)(p-20)} = \sqrt{36 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 16} = 240.$$

$$\frac{OK}{BK} = \frac{1}{3} \text{ (свойство медиан).}$$

Треугольники BHK и OEK подобны, $\frac{OE}{BH} = \frac{OK}{BK} = \frac{1}{3}$ и $BH = 3OE$.

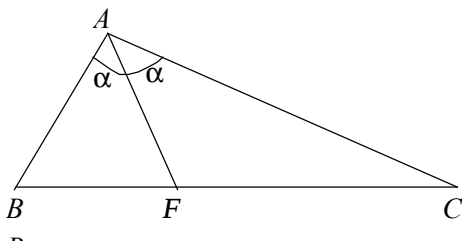
$$S_{ABC} = BD \cdot AC / 2 = 3 \cdot OE \cdot AC / 2 = 3 \cdot S_{AOC} = 3 \cdot 240 = 720.$$

Ответ: 720 см^2 .

30. Докажите, что длина биссектрисы угла A треугольника может быть

$$\text{вычислена по формуле: } AF = \frac{BC \cdot AB}{AC + AB} \cdot \frac{\sin B}{\sin(A/2)}.$$

Решение.



$$\frac{BC}{FB} = \frac{AC}{AB} \text{ (свойство гипотенуз).}$$

$$\frac{FB + FC}{FB} = \frac{AB + AC}{AB} \Rightarrow FB = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC}.$$

$$\text{По теореме синусов } AF = BF \cdot \frac{\sin B}{\sin(A/2)} = \frac{BC \cdot AB}{AC + AB} \cdot \frac{\sin B}{\sin(A/2)}$$

31. На биссектрисе AF треугольника ABC выбрана точка K . Докажите, что эта точка равноудалена от сторон AB и AC .

Решение.

Из точки K опустим перпендикуляры на сторон AB и AC . Получившиеся треугольники равны по двум углам и общей стороне.

32. Треугольник имеет стороны 5, 6 и 7 см, периметр подобного ему треугольника равен 72 см. Найдите большую сторону второго треугольника.

Решение.

$$P = 5 + 6 + 7 = 18; \kappa = 72/18 = 4; a_1 = 7 \cdot 4 = 28.$$

Ответ: 28 см.

33. Периметры подобных треугольников относятся как 2:3, сумма их площадей равна 520 м^2 . Найдите площадь большего треугольника.

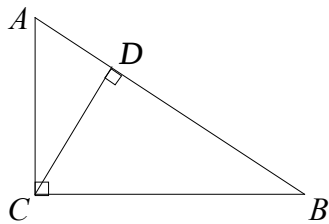
Решение.

$$S_1 + S_2 = 520; S_1 \cdot 2^2 = S_2 \cdot 3^2. S_2 (1 + 2^2/3^2) = 520.$$

Ответ: 360 см^2 .

34. Докажите, что в прямоугольном треугольнике, длина высоты, опущенной на гипотенузу C , есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу.

Решение.



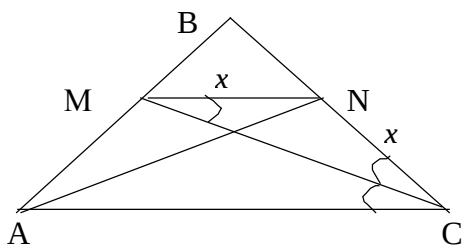
Треугольники ABC , ACD и BCD подобны по двум углам (прямоуго и общему).

$$\frac{CD}{DA} = \frac{BD}{CD} \Leftrightarrow CD = \sqrt{BD \cdot DA}.$$

35. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, а боковая сторона равна 12 см. Найдите длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании треугольника.

Решение.

Пусть $MN = x$, т.к. треугольник MNC – равнобедренный, то $NC = x$.



Треугольники ABC и MNB подобны,
поэтому

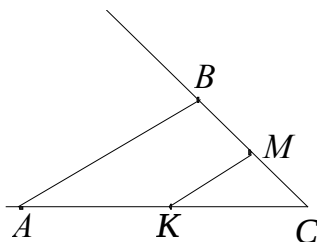
$$\frac{12-x}{12} = \frac{x}{8}$$

$$\text{или } 96 - 8x = 12x \text{ или } x = 4,8.$$

Ответ: 4,8 см.

36. Докажите теорему Фалеса. Если на одной из сторон угла от его вершины последовательно отложить равные отрезки и через концы этих отрезков провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отсекаются также равные отрезки.

Решение.



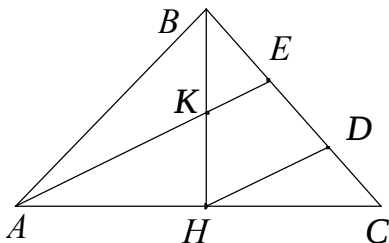
Треугольники ABC и KCM – подобны.

$$\frac{AC}{KC} = \frac{BC}{MC} \Rightarrow \frac{AC}{KC} - 1 = \frac{BC}{MC} - 1 \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{BM}{MC}.$$

Из равенства $AK = KC$ следует $BM = MC$.

37. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне AC взята точка E так, что $BE : EC = 1 : 2$. В каком отношении отрезок AE делит высоту BH треугольника, считая от вершины B .

Решение.



По условию $BE : EC = 1 : 4$. Обозначим $BE = x$, $EC = 4x$. Проведем $KD \parallel AC$.

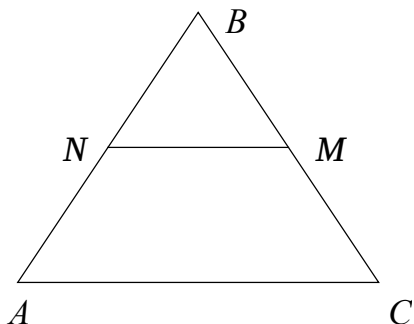
$$\frac{DE}{DC} = \frac{AH}{HC} = \frac{1}{1} \Rightarrow DE = EC = 2x.$$

$$\frac{BK}{KH} = \frac{BE}{DE} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2.

38. В треугольнике с основанием 15 см проведен отрезок, параллельный основанию. Площадь полученной трапеции составляет 75% площади треугольника. Найдите длину отрезка.

Решение.



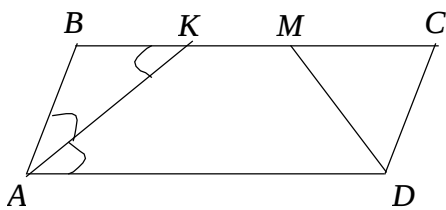
$$AC = 15.$$

$$\frac{S_{NBM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} = \frac{MN^2}{AC^2} \Rightarrow$$

$$MN^2 = \frac{AC^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow MN = \frac{15}{2} = 7,5$$

Ответ: 7,5 см.

39. Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три равные по 5 см части. Найдите периметр параллелограмма.



$$AB = BK = 5; DC = 15.$$

Ответ: 40 см.

40. Площадь параллелограмма, равна 4 см^2 , а стороны образуют угол 45° . Найдите длину стороны параллелограмма, если другая сторона равна $\sqrt{2}$.

Решение.

$$AB * AD * \cos 45 = 4 \Rightarrow AD = 4.$$

Ответ: 4 см.

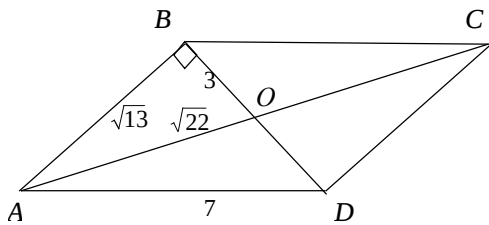
41. Диагонали параллелограмма равны 3 и 5 см, одна из сторон – 4 см. Найдите другую сторону.

Решение.

$$9+25 = 2 \cdot 16 + 2x^2$$

Ответ: 1 см.

42. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD , перпендикулярной стороне AB , равна 6. Длина диагонали AC равна $2\sqrt{22}$. Найдите длину стороны AD .



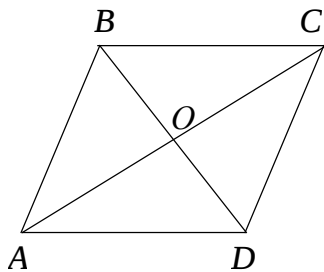
По условию $AB \perp BD$; $BD = 6$; $AC = 2\sqrt{22}$. Значит $OB = 3$ и $OA = \sqrt{22}$ (свойство диагоналей параллелограмма).

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{13} \text{ и } AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 7.$$

Ответ: 7 см.

43. Определите площадь ромба, диагональ которого равна 10 см и делит его на два правильных треугольника.

Решение.



По условию $BD = 10$, $\angle BAD = 60^\circ$.
 $BD = AB = BC = CD = DA = 10$.

$$BD \perp AC, BO = \frac{1}{2} BD = 5, \angle BAO = 30^\circ$$

(свойство диагоналей ромба). $\frac{AO}{BO} = \operatorname{ctg} 30^\circ \Leftrightarrow$

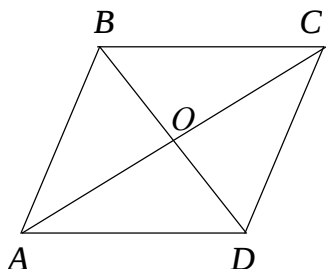
$$AO = BO \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3} \Rightarrow AC = 10\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}.$$

Ответ: $50\sqrt{3} \text{ см}^2$.

44. Найдите периметр ромба площадью 96 см^2 , если длины его диагоналей относятся как $3 : 4$.

Решение.

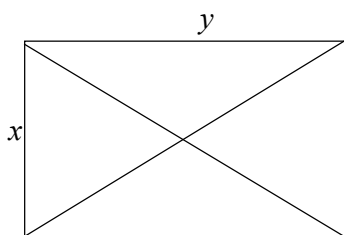


$$\begin{aligned} OB &= 3x; OC = 4x; \\ S &= 24x^2, x = 2. \\ (3x)^2 + (4x)^2 &= AB^2, \\ AB &= 5x, AB = 10, \\ P &= 40. \end{aligned}$$

Ответ: 40 см.

45. Под каким углом пересекаются диагонали прямоугольника, имеющего периметр 16 см и площадь 16 см^2 .

Решение.



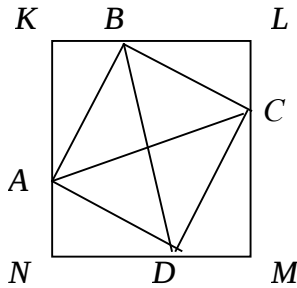
$$\begin{aligned} \text{По условию } 2x + 2y &= 16, x \cdot y = 16. \quad x + 16/x = 8 \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 &= 0 \Rightarrow x = 4. \quad y = 16/x = 4. \end{aligned}$$

Прямоугольник является квадратом, частным случаем ромба. Диагонали перпендикулярны.

Ответ: 90° .

46. Точки $ABCD$ делят стороны квадрата $KLMN$ в отношении $1 : 2$. Найдите сторону квадрата $KLMN$, если диагональ квадрата $ABCD$ равна a .

Решение.



По условию $AC = a$, $BL = 2KB$.

$$AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

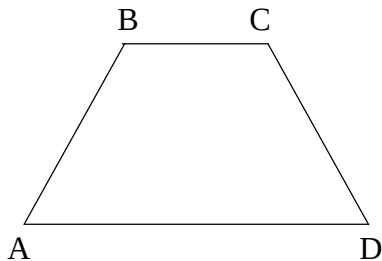
Пусть $LKB = x$, $AK = BL = 2KB = 2x$.

$$\text{Тогда } x^2 + 4x^2 = a^2/2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

47. Определите периметр равнобокой трапеции, если ее средняя линия равна 25 см, боковая сторона равна 15 см.

Решение.



$$P = AB + BC + CD + AD =$$

$$= (AB + CD) + (BC + AD) =$$

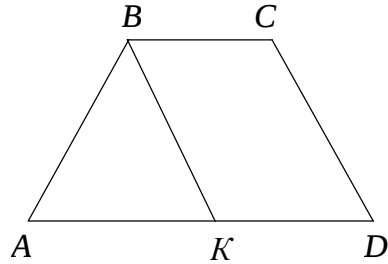
$$= (BC + AD) + 2 \frac{BC + AD}{2} =$$

$$= (15 + 15) + 2 \cdot 25 = 80.$$

Ответ: 80 см.

48. Нижнее и верхнее основания равнобокой трапеции соответственно равны 72 и 20 см. Угол при нижнем основании равен 60° . Определите длину боковой стороны.

Решение.

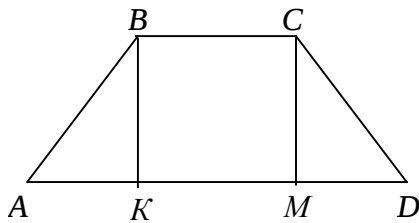


Ответ: 52 см

По условию $AD = 72$, $BC = 20$.
 $KD = BC = 20$, $AK = 52$. Проведем $BK \parallel CD$, треугольник ABK –
 правильный и $AB = AK = 52$.

49. Высоты равнобочной трапеции делят ее на квадрат и два равнобедренных треугольника, а ее боковая сторона равна $4\sqrt{2}$ см. Найти площадь трапеции.

Решение.

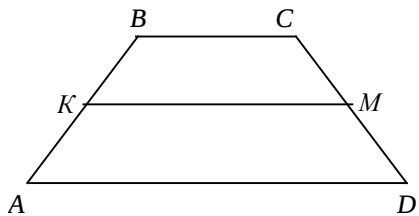


Ответ: 32 см².

$AK = BK = 4$ – треугольник равнобедренный.
 $BK = KM = 4$ – стороны квадрата.
 $AD = 4 + 4 + 4 = 12$.
 $S = BK \cdot (BC + AD) / 2 = 32$.

50. Средняя линия трапеции делит ее на две трапеции, средние линии которых равны 10 см и 18 см. Найдите длину большего основания.

Решение.



Ответ: 22 см.

$$\begin{aligned} (AD + BC) / 2 &= KM. \\ (KM + BC) / 2 &= 10. \quad (KM + AD) / 2 = 18. \\ \begin{cases} AD + 3BC = 40 \\ 3AD + BC = 72 \end{cases} & \quad AD = 22 \end{aligned}$$

51. Докажите, что сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

Решение.

Разобьем n -угольник на $(n - 2)$ треугольника диагоналями, исходящими из одной вершины. Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна сумме углов всех треугольников.

52. Докажите, что в выпуклом n -угольнике можно провести $(n - 3) n / 2$ диагоналей.

Решение.

Из каждой вершины можно провести $n - 3$ диагоналей. Удвоенное количество диагоналей равно $(n - 3) n$.

53. Сколько диагоналей имеет выпуклый многоугольник с суммой внутренних углов 900° ?

Решение.

$$180^\circ(n - 2) = 900^\circ; n = 7; (n - 3) n / 2 = 14.$$

Ответ: 14.

54. Найдите сумму внешних углов выпуклого n -угольника.

Решение.

У каждой вершины сумма внешнего и внутреннего углов равна 180° . Сумма всех внешних и внутренних углов равна $180^\circ n$. Сумма только внешних углов равна $180^\circ n - 180^\circ(n - 2) = 360^\circ$.

Ответ: 360° .

55. В выпуклом четырехугольнике со сторонами a, b, c, f и диагоналями d_1, d_2 расстояние между серединами диагоналей равно m . Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + f^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2m$.

Решение.

Обозначим x, y, z, t расстояние от вершин до точки пересечения диагоналей. 5 раз запишем теорему косинусов и сложим равенства.

56. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, f не превышает величины $(a^2 + b^2 + c^2 + f^2)/4$.

Решение.

$$2ab < a^2 + b^2; 2cf < c^2 + f^2;$$

$$S = ab \sin \alpha / 2 + cf \sin \beta / 2 < ab/2 + cf/2 < (a^2 + b^2)/4 + (c^2 + f^2)/4$$

57. Найдите угол между сторонами правильного десятиугольника.

Решение.

Сумма углов при вершинах десятиугольника равна $(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

Угол между сторонами правильного десятиугольника $1440^\circ / 10 = 144^\circ$.

Ответ: 144° .

58. Вычислите площадь правильного восьмиугольника со стороной a .

Решение.

Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $360^\circ / 8 = 45^\circ$. По

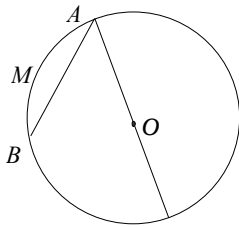
теореме косинусов $a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $r^2 = \frac{a^2}{1 - \sqrt{2}/2}$.

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2a^2 \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}/2} = 4(\sqrt{2} + 1)a^2.$$

Ответ: $4(\sqrt{2}+1)a^2$.

59. Из точки, взятой на окружности радиуса 3, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите длину дуги, стягиваемой хордой.

Решение.



Соединив конец хорды B с центром круга O , получим равносторонний треугольник AOB , все углы которого равны $\pi/3$. Длина дуги $L_{AMB} = R\alpha$.
 $= 3 \cdot \pi/3 = \pi$.

Ответ: π .

60. Из точки A , взятой на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC , причем хорда AC стягивает дугу 54° . Найдите угол ACB .

Решение.

Хорда AB стягивает дугу $180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$. Угол ACB равен половине дуги, на которую он опирается.

Ответ: 63° .

61. Площадь кругового кольца равна S . Радиус большей окружности равен длине меньшей окружности. Найдите радиус меньшей окружности.

Решение.

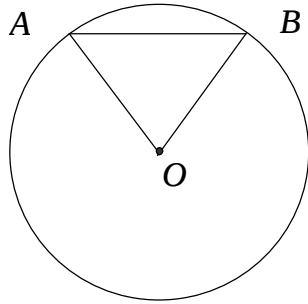
$$\begin{cases} \pi R^2 - \pi r^2 = S \\ 2\pi r = R \end{cases} \Rightarrow \pi r^2(4\pi^2 - 1) = S.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2 - 1)}}.$$

62. В круге радиуса 2 проведена хорда длиной 2. Вычислите площадь полученного сегмента.

Решение.

По условию $AB = 2$, $OA = OB = r = 2$. Треугольник AOB – правильный и $\angle AOB = \pi/3$



$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{\Delta} = r^2 \alpha / 2 - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}.$

63. Докажите, что в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.

Решение.

Гипотенуза является диаметром.

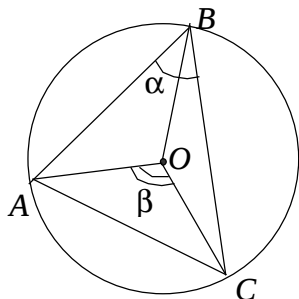
64. Докажите, что если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 180° .

Решение.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, а сумма дуг двух противоположных углов четырехугольника равна 360° .

65. Докажите, что вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же (или) равную дугу.

Решение.



$$\Delta AOB: \angle AOB = \pi - 2\angle ABO.$$

$$\Delta BOC: \angle BOC = \pi - 2\angle OBC.$$

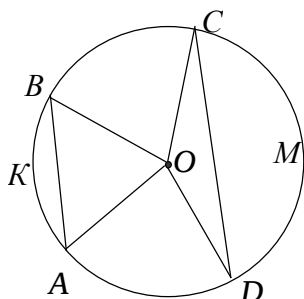
$$\beta = 2\pi - \angle AOB - \angle BOC =$$

$$2\pi - (\pi - 2\angle ABO) - (\pi - 2\angle OBC) =$$

$$2(\angle ABO + \angle OBC) = 2\alpha$$

66. В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу 60° , а другая – 120° . Найдите часть площади круга, заключенного между этими хордами.

Решение.



$$S = S_{\text{круга}} - S_{\text{сектора} OAKB} - S_{\text{сектора} OCDM} +$$

$$+ S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} =$$

$$= \pi R^2 - \pi R^2/6 - \pi R^2/3 + \frac{1}{2} R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 (\pi + \sqrt{3}).$$

Ответ: $\frac{1}{2} R^2 (\pi + \sqrt{3}).$

67. Хорда окружности, перпендикулярная диаметру делит его на отрезки, длины которых равны 16 см и 2 см. Найдите длину хорды.

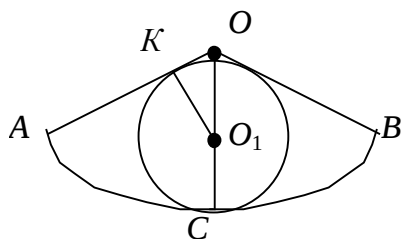
Решение.

$$x^2/4 = (16+2) \cdot 2 \Rightarrow x = 12.$$

Ответ: 12 см.

68. Найдите радиус окружности, вписанной в сектор радиуса R с центральным углом сектора 120° .

Решение.



По условию $OA = OB = R$, $\angle AOB = 120^\circ$

следовательно, $\angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$.

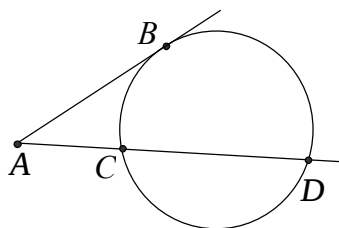
Обозначим $O_1K = O_1C = r$, тогда

$OO_1 = OC - r = 45 - r$. Радиус O_1K проведен в точку касания, поэтому $O_1K \perp OA$. В треугольнике OO_1D гипотенуза $O_1K = OO_1 \cdot \sin 60^\circ$, что дает возможность составить уравнение $r = (R - r) \frac{\sqrt{3}}{2}$ и найти $r = (4 - 2\sqrt{3})R$.

Ответ: $(4 - 2\sqrt{3})R$.

69. Из точки вне окружности проведены касательная и секущая. Окружность делит секущую на отрезки, длины которых равны 9 см и 16 см. Найдите длину секущей.

Решение.

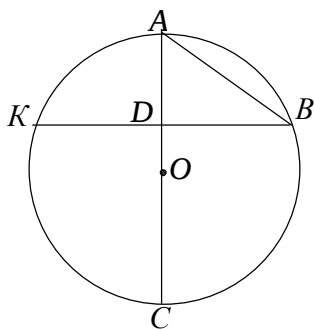


$$AB^2 = AD \cdot AC = AD \cdot (AC + CD) = 9 \cdot (9 + 16) = 225.$$

Ответ: 25 см.

70. Из точки окружности проведены диаметр и хорда, длина которой равна 30 см, проекция хорды на диаметр относится к радиусу окружности как 18:25. Найдите радиус окружности.

Решение.



Дано: $AB = 30$; $AD = 18 \cdot R/25$; $AC = 2R$.

Проведем хорду $BK \perp AC$.

$$DC = 2R - 18 \cdot R/25 = 32 \cdot R/25.$$

$$KD \cdot BD = AD \cdot DC = 18 \cdot 32 \cdot R^2/25^2 = (24R/25)^2 \Rightarrow$$

$$BD = 24R/25.$$

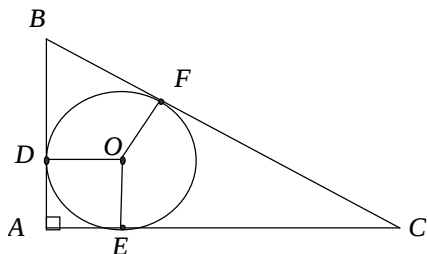
$$(18 \cdot R/25)^2 + (24R/25)^2 = 30^2 \Rightarrow R = 25.$$

Ответ: 25 см.

71. Найдите радиус окружности вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза равна 10 см, а периметр треугольника равен 24 см.

Решение.

Приведем два решения.



1) Точка O – центр вписанной окружности,

$ADOE$ – квадрат (свойство радиусов, проведенных в точку касания).

$$AD = AE, \quad BF = BD; \quad FC = CE$$

(свойство касательных)

$$P = BC + AB + AC = BC + (AD + DB) + (AE + EC) =$$

$$= BC + (r + BF) + (r + CF) = BC + BF + FC + 2r = 2BC + 2r$$

$$\Rightarrow 24 = 2 \cdot 10 - 2r \Rightarrow r = 2.$$

2) Обозначим катеты треугольника x, y . Тогда

$$\begin{cases} x + y = 24 - 10 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \Rightarrow xy = 96. \quad r = \frac{S}{p} = \frac{xy/2}{p} = \frac{48}{24} = 2.$$

Ответ: 2 см.

72. Докажите, что если окружность вписана в четырехугольник, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.

Решение.

Отрезки от вершины четырехугольника до точки касания с окружностью равны.

73. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 15 см, а периметр равен 54 см. Найдите радиусы вписанной и описанной в треугольник окружностей.

Решение.

$$a = 15; b=15; c=24. h = 9; p = 27; S = 54;$$

$$r = S/p = 2; R = abc/4S = 15 \cdot 15 \cdot 24 / (4 \cdot 54) = 25.$$

Ответ: 2 и 25 см.

74. Катет прямоугольного треугольника равен 15 см, медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12,5 см. Найти периметр треугольника.

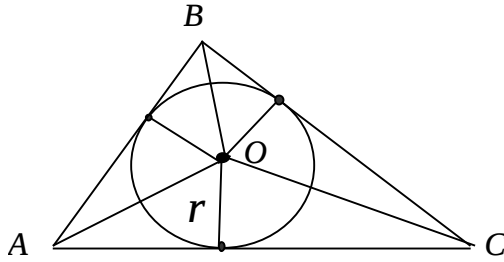
Решение.

Проведем окружность, радиус которой равен медиане, а центр лежит на середине гипотенузы. Гипотенуза является диаметром и равна 25. По теореме Пифагора находим второй катет – 20.

Ответ: 60 см.

75. В треугольник вписан круг. Прямые, соединяющие центр круга с вершинами делят треугольник на три части с площадями 4, 13 и 15 см². Найдите радиус описанной окружности.

Решение.



$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = 32.$$

$$S_{AOB} = AB \cdot r / 2; S_{BOC} = BC \cdot r / 2;$$

$$S_{AOC} = AC \cdot r / 2. S_{ABC} = p \cdot r.$$

$$\frac{AB}{p} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{8}{32}; \frac{BC}{p} = \frac{26}{32};$$

$$\frac{AC}{p} = \frac{30}{32}. \text{ Следовательно, } AB = 4p/16; BC = 13p/16; AC = 15p/16.$$

По формуле Герона

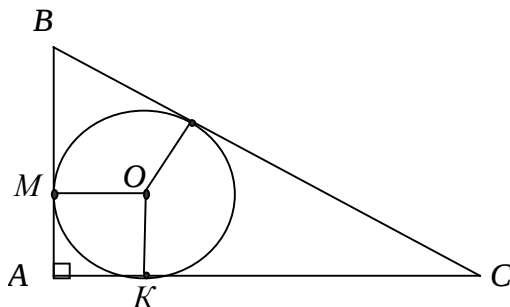
$$32 = S_{ABC} = \sqrt{p(p - 4p/16)(p - 13p/16)(p - 15p/16)} = 3p^2 / 32.$$

$$p = \frac{32\sqrt{3}}{3}; AB = \frac{8\sqrt{3}}{3}; BC = \frac{26\sqrt{3}}{3}; AC = 10\sqrt{3}.$$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S_{ABC}} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 26\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{9 \cdot 4 \cdot 32} = \frac{65\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{65\sqrt{3}}{12} \text{ см.}$$

76. Найдите радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки длины m и n .



$$AM = m, MB = n (n > m)$$

$$BN = MB = n$$

$$AK = AM = m$$

$$KC = NC = x$$

$$(m + n)^2 + (m + x)^2 = (x + n)^2 \Leftrightarrow$$

$$m^2 + 2mn + n^2 + m^2 + 2mx + x^2 = x^2 + 2nx + n^2 \Leftrightarrow$$

$$2x(n - m) = 2m^2 + 2mn \Rightarrow x = \frac{m(m + n)}{n - m}.$$

$$BC = n + x = n + \frac{m^2 + mn}{n - m} = \frac{n^2 - mn + m^2 + mn}{n - m} = \frac{m^2 + n^2}{n - m}.$$

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{m^2 + n^2}{2(n - m)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{m^2 + n^2}{2(n - m)}.$$

77. Докажите, что, если параллелограмм вписан в окружность, то он является прямоугольником.

Решение.

Диагональ является диаметром. Угол, опирающийся на диаметр равен 90° .

78. Периметр равнобокой трапеции равен 40 см, радиус вписанной в трапецию окружности равен 3 см. Найдите площадь трапеции.

Решение.

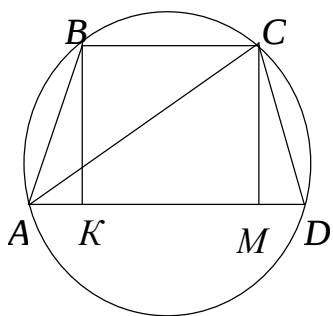
Если в трапецию вписана окружность, то сумма оснований трапеции равна сумме ее боковых сторон (свойство вписанного четырехугольника). Следовательно, сумма оснований $40/2 = 20$, средняя линия равна 10. $S = 10 \cdot 6 = 60$.

Ответ: 60 см².

79. Докажите, что, если трапеция вписана в окружность, то она является равнобокой.

Решение.

$\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ$ – внутренние односторонние углы.



$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ – свойство

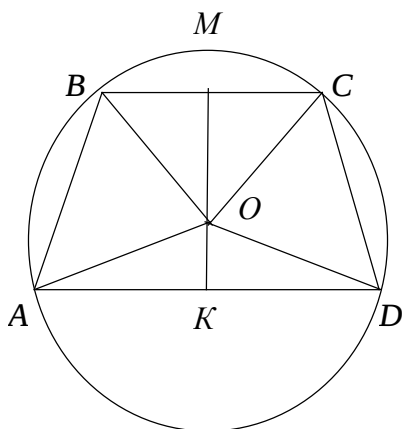
вписанного четырехугольника. Следовательно,

$\angle DAB = \angle ADC$ и треугольники ABK и

CDM равны.

80. Основания равнобокой трапеции равны 12 и 16 см, а высота равна 14 см. Найдите площадь круга описанного вокруг трапеции.

Решение.



$$R^2 = (14 - x)^2 + 8^2,$$

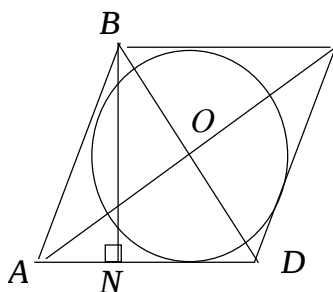
$$R^2 = x^2 + 6^2.$$

$$x = 8; R = 10.$$

Ответ: $100\pi \text{ см}^2$.

81. В ромб, сторона которого равна 20 см, вписан круг. Найдите площадь круга, если одна диагональ ромба больше другой в $\frac{4}{3}$ раза.

Решение.



По условию, $AC \perp BD$; $AC = 4 \cdot BD / 3$,

$$AB = BC = CD = DA = 20$$

Проведем $BN \perp AD$; $BN = 2r$.

Обозначим $OA = 3x$, $OB = 4x$. Тогда

$$AD = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x = 20 \text{ и } x = 4.$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot OA \cdot OB = AD \cdot BN.$$

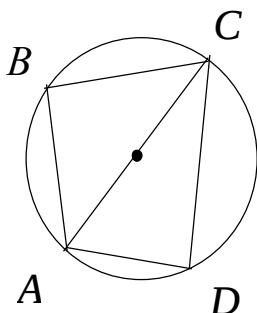
$$BN = 2 \cdot OA \cdot OB / AD = 2 \cdot 12 \cdot 16 / 20 = 19,2, r = BN / 2 = 9,6.$$

$$\text{и. } S_{\text{круга}} = \pi r^2 = 92,16\pi.$$

Ответ: $92,16\pi \text{ см}^2$.

82. В окружность радиуса 5 вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол ADC прямой, $AB:BC = 3:4$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если его площадь равна 44.

Решение.



Четырехугольник вписан в окружность, сумма двух его противоположных углов равна 180° , и, следовательно, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$.

$AC = 10$ – диаметр окружности.

Обозначим $AB = 3x$; $BC = 4x$.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 16x^2 = 100 \Rightarrow x = 2 \text{ и } AB = 6, BC = 8.$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC = 44 - S_{ABC} = 44 - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = 44 - 24 = 20$$

$$\Rightarrow AD \cdot DC = 40. \begin{cases} AD^2 + DC^2 = AC^2 \\ AD \cdot DC = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AD^2 + 2AD \cdot DC + DC^2 = 100 + 80 = 180 \Rightarrow (AD + DC)^2 = 180 \Rightarrow AD + DC = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$P = AB + BC + AD + DC = 6 + 8 + 6\sqrt{5} = 14 + 6\sqrt{5}$$

Ответ: $14 + 6\sqrt{5}$.

83. Во сколько раз площадь описанной вокруг правильного шестиугольника окружности больше вписанной в этот шестиугольник окружности.

Решение.

Обозначим сторону шестиугольника (радиус описанной окружности) a . Тогда высота правильного треугольника (радиус вписанной окружности)

равна $a\sqrt{3}/2$. Отношение площадей $\frac{\pi a^2}{\pi(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{4}{3}$.

9.3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что медиана, проведенная из какой-либо вершины треугольника, равноудалена от двух других его вершин.

2. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 6, а периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, равен 65 см. Найдите периметр и длины сторон данного треугольника.

Ответ: 130 см, 30 см, 40 см, 60 см.

3. В треугольнике из одной вершины проведены биссектриса и высота. Докажите, что угол между ними равен полуразности двух других углов треугольника.

4. В равнобедренном треугольнике угол между высотами, проведенными к боковым сторонам, равен 124° . Найдите углы треугольника.

Ответ: 56° ; 62° ; 62° .

5. Перпендикуляры, опущенные из произвольной точки, лежащей внутри равностороннего треугольника со стороной 12 см, относятся как 1 : 2 : 3. Найдите длины этих перпендикуляров.

Ответ: $\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{3}$ см; $3\sqrt{3}$ см.

6. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника меньше площади равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе.

7. Докажите, что в любом треугольнике длина медианы m_c удовлетворяет

неравенствам $\frac{a+b-c}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$.

8. Высота треугольника в два раза меньше основания, а один из углов при основании равен 75° . Докажите, что треугольник равнобедренный.

9. Даны два квадрата, диагонали которых равны 3 см и 5 см. Найдите сторону квадрата, равновеликого разности данных квадратов.

Ответ: $2\sqrt{2}$ см.

10. Стороны параллелограмма равны 8 см и 3 см. Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найдите длину каждой из них.

Ответ: 3 см; 2 см; 3 см.

11. Найдите периметр ромба, если его диагонали равны 8 см и 6 см.

Ответ: 20 см.

12. В треугольник с основанием 16 см и высотой 4 см вписан прямоугольник, площадь которого равна 12 см^2 . Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: 1 см и 12 см; 3 см и 4 см.

13. Докажите, что если соединить отрезками прямых середины последовательных сторон равнобокой трапеции, то получится ромб.

14. Найдите углы равнобокой трапеции, если верхнее основание равно боковой стороне и вдвое меньше нижнего основания трапеции.

Ответ: 60° ; 120° .

15. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника – равносторонний и прямоугольный. Найдите длину средней линии трапеции, если стороны равностороннего треугольника равны a .

Ответ: $3a/4$.

16. Средняя линия трапеции, равная 2 см, делит трапецию на части, площади которых относятся как 7 : 9. Найдите основания трапеции.

Ответ: $3/2$ см; $5/2$ см.

17. Докажите, что линия, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения её диагоналей.

18. В трапеции, основания которой равны a и b , через точку пересечения диагоналей проведена прямая параллельно основанию.

Найдите длину этого отрезка.

Ответ: $2ab/(a+b)$.

19. Средняя линия трапеции делится двумя диагоналями на три равные части. Найдите отношение меньшего основания трапеции к большему.

Ответ: $1/2$.

20. Три последовательные стороны описанного четырехугольника относятся как 1 : 2 : 3. Определите длины сторон четырехугольника, если известно, что его периметр равен 24 см.

Ответ: 3 см; 6 см; 9 см; 6 см.

21. Вокруг четырехугольника ABCD можно описать окружность. Кроме того, $AB=3$ см, $BC=4$ см, $CD=5$ см, $AD=2$ см. Найдите длину диагонали AC.

Ответ: $\sqrt{299/11}$ см.

22. Радиусы двух окружностей, имеющих внутреннее касание, равны R и r ($r < \frac{1}{2}R$). Из центра большей окружности проведена касательная к меньшей. Найдите расстояние от центра большей окружности до точки касания.

Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.

23. Правильный треугольник вписан в окружность и через середины двух дуг проведена хорда. Докажите, что стороны треугольника делят хорду на три равные части.

24. Из конца диаметра AB проведена хорда AC , которая продолжена за точку C до точки D так, что $AC = CD$. Докажите, что треугольник ABD – равнобедренный.

25. В треугольник вписана окружность. Точки касания делят ее на три дуги, к каждой из которых проведена касательная до пересечения со сторонами исходного треугольника. Докажите, что сумма периметров трех получившихся треугольников равна периметру исходного треугольника.

26. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла A опущена высота AD на гипотенузу. Докажите, что радиусы описанных окружностей R_1 , R_2 , R треугольников ADC , ABD и ABC связаны равенством $R^2 = R_1^2 + R_2^2$.

27. В ромб вписана окружность радиуса R . Найдите площадь ромба, если его большая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3} R^2$.

28. Около окружности описана равнобокая трапеция с углом при нижнем основании 60° . Периметр трапеции равен 130 см. Найдите диаметр окружности.

Ответ: $\frac{65\sqrt{3}}{4}$ см.

29. В данный острый угол вписаны три круга так, что средний касается двух крайних. Найдите радиус среднего круга, если радиусы крайних равны r и R ($r < R$).

Ответ: $\sqrt{r \cdot R}$.

30. В остроугольном треугольнике ABC точка E делит сторону BC в отношении $2 : 3$, точка D делит сторону AC в отношении $4 : 1$. В каком отношении отрезок AE делит отрезок BD ?

Ответ: $5 : 6$.

30. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через вершину проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K . Найдите отношение длин оснований трапеции, если $BE : ED = 1 : 2$ и $CK : KD = 1 : 4$.

Ответ: $1 : 4$.

9.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ

Треугольники. Основные свойства

Вариант 1

№ задания	Задание
1	В треугольнике один из углов равен разности двух других. Найдите наибольший угол треугольника.
2	Медиана, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит его на два треугольника с периметрами 18 см и 9 см. Найдите длину основания.
3	Высота треугольника равна $\sqrt{8}$ см. Прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него меньший треугольник, площадь которого равна половине площади данного треугольника. Найдите высоту меньшего треугольника.
4	Точки P , Q , R делят стороны AB , BC и CA треугольника ABC в отношении 1:1, 3:1 и 2:3 соответственно. Найдите отношение площадей треугольников PQR и ABC .
5	Найдите площадь треугольника со сторонами 7 см, 8 см и 10 см.
6	Найдите площадь треугольника с боковыми сторонами 4 см и 5 см, если углы при основании равны 80° и 70° .
7	Найдите площадь треугольника со сторонами 1 см и $\sqrt{3}$ см, если медиана третьей стороны равна 2 см.
8	Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 24 см, 20 см и 56 см. Найдите боковые стороны.
9	Угол между сторонами AB и BC треугольника ABC равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите площадь треугольника ABC , если сторона BC равна $10\sqrt{2}$ см, а сторона AB равна 7 см.
10	Найдите площадь треугольника со сторонами 6 см и 8 см, если медианы этих сторон перпендикулярны.

№ задания	Задание
1	В треугольнике внутренние углы относятся как 2:3:5. Найдите внешний угол треугольника, смежный с меньшим внутренним углом.
2	В треугольнике ABC проведена прямая AD так, что углы CAD и ACD равны. Найдите длину стороны AC , если периметры треугольников ABC и ABD равны 33 см и 21 см.
3	Площади подобных треугольников относятся как 1:4. Найдите длину стороны большего треугольника сходственной стороне длины 5 см меньшего треугольника.
4	Установите, в каком отношении медиана стороны AC треугольника ABC делится отрезком AD , если $BD:BC = 1:4$.
5	Стороны AB и BC треугольника ABC равны 6 см и $8\sqrt{2}$ см соответственно, угол между ними равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите высоту треугольника, опущенную на AB .
6	Найдите большой угол треугольника со сторонами 10 см, 17 см и 21 см.
7	В треугольнике с основанием 60 см высота и медиана, проведенные к основанию равны 17 см и 13 см соответственно. Найдите длину наименьшей стороны треугольника.
8	В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника DEF равна 5 см^2 .
9	В треугольнике ABC сторона AB равна 4 см, AC равна 5 см, BC равна 7 см. Найдите высоту, опущенную из точки A на сторону BC .
10	Основание треугольника равно 26 см. Медианы боковых сторон равны 30 см и 39 см. Найдите площадь треугольника.

№ задания	Задание
1	В треугольнике ABC угол A равен 84° , угол B равен 76° . Найдите угол между биссектрисой угла A и высотой, опущенной на сторону BC .
2	Найдите периметр треугольника со сторонами a, b, c , если $a + b = 11$ см, $b + c = 10$ см, $c + a = 15$ см.
3	Периметры подобных треугольников относятся как $2:3$, сумма их площадей равна 260 см ² . Найдите площадь большего треугольника.
4	Точки D, E, F делят стороны треугольника ABC в отношениях $AD : DB = 3 : 1$, $BE : EC = 3 : 2$, $AF : FC = 4 : 1$. Найдите отношение площадей треугольников DEF и ABC .
5	Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 12 см и 14 см, а угол между ними равен 30° .
6	В треугольнике ABC высота AD на 4 см меньше стороны BC . Сторона AC равна 5 см. Найдите периметр треугольника, если его площадь равна 16 см ² .
7	Найдите длину медианы большей стороны треугольника со сторонами 11 см, 12 см и 13 см.
8	Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание равна 20 см, а высота, опущенная на боковую сторону равна 24 см.
9	Найдите площадь треугольника со сторонами 35 см и 14 см, если биссектриса угла между этими сторонами равна 12 см.
10	Медианы треугольника равны 3 см, 4 см, 5 см. Найдите площадь треугольника.

№ задания	Задание
1	В треугольнике один из внутренних углов равен 60° , а два других относятся как 2 : 3. Найдите больший угол.
2	В треугольнике ABC проведена прямая AD так, что треугольник ADC равнобедренный с основанием AC . Найдите длину основания, если периметры треугольников ABC и ABD равны соответственно 39 см и 27 см.
3	Стороны треугольника равны 5 см, 6 см и 7 см. Периметр подобного ему треугольника равен 72 см. Найдите большую сторону подобного треугольника.
4	В треугольнике ABC точка E делит сторону BC в отношении 2 : 3, точка D делит сторону AC в отношении 4 : 1. Найдите отношение, в котором отрезок AE делит отрезок BD .
5	Найдите угол между сторонами треугольника 8 см и см, если площадь треугольника равна 36 см^2 .
6	Найдите длину большей высоты треугольника со сторонами 3 см, 4 см и 5 см.
7	Найдите длину медианы большей стороны треугольника со сторонами 7 см, 17 см и 18 см.
8	Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 см и 8 см, а медиана третьей стороны равна 5 см.
9	Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 6$ см, $BC = 12$ см и биссектриса угла B отсекает равнобедренный треугольник ABD .
10	Найдите площадь треугольника ABC , если длины медиан сторон AC и AB равны 4 см и 5 см, а длина высоты, опущенной на сторону BC равна 6 см.

Треугольники. Основные свойства

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	90	144	28	72
2	3	12	18	12
3	2	10	180	28
4	9:40	2:3	17:100	5:6
5	$\frac{15\sqrt{55}}{4}$	8	42	$\frac{\pi}{3}$
6	5	$\arcsin \frac{84}{85}$	$13 + \sqrt{41}$	4
7	$\sqrt{3}$	$\sqrt{769}$	$\frac{\sqrt{445}}{2}$	$\sqrt{88}$
8	{26, 304}	60	300	24
9	35	$\frac{8\sqrt{6}}{7}$	235,2	$\frac{27\sqrt{7}}{2}$
10	$4\sqrt{11}$	720	8	$2(\sqrt{7} + 4)$

**Прямоугольный, равнобедренный,
равносторонний треугольники**

Вариант 1

№ задания	Задание
1	В прямоугольном треугольнике один из острых углов вдвое больше другого. Найдите эти углы.
2	Периметр равнобедренного треугольника равен 7 см, а сумма боковых сторон в 2,5 раза больше основания. Найдите длину боковой стороны.
3	Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь треугольника.
4	Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит ее на отрезки 4 см и 9 см. Найдите длину большего катета треугольника.
5	В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а высота равна 20 см. Определите боковую сторону треугольника.
6	В треугольнике ABC угол B равен 105° , угол C равен 15° . Найдите высоту треугольника, опущенную из вершины B , если длина стороны AB равна $\sqrt{3}$ см.
7	Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 30 см и 40 см.
8	Найдите площадь описанного около равнобедренного треугольника круга, если площадь треугольника равна $(\sqrt{2} - 1)$ см ² , а угол при вершине равен 135° .
9	В прямоугольном треугольнике отрезки гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанной окружности, равны 2 см и 3 см. Найдите радиус вписанной окружности.
10	Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 3,5 см, а периметр треугольника равен 36 см. Найдите радиус описанной окружности.

**Прямоугольный, равнобедренный,
равносторонний треугольники**

Вариант 2

№ задания	Задание
1	В равнобедренном треугольнике разность двух неравных внутренних углов равна 90° . Найдите больший угол.
2	Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно 17 см, а периметр равен 93 см.
3	Сумма гипотенузы и катета прямоугольного треугольника равна 9 см, а их разность равна 4 см. Найдите другой катет.
4	Один из катетов прямоугольного треугольника равен 3 см, а медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 2,5 см. Определите гипотенузу и другой катет.
5	Высота равнобедренного треугольника равна 10 см, а боковая сторона равна $\frac{\sqrt{481}}{2}$ см. Найдите площадь треугольника.
6	В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 2 см больше другого. Найдите длину гипотенузы.
7	Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 2 см, если противоположный основанию угол между медианами боковых сторон равен 90° .
8	Сумма меньшего катета и гипотенузы равна 3 см. Острый угол треугольника равен 30° . Найдите радиус описанной окружности.
9	В равнобедренном треугольнике высота равна 32 см, а боковая сторона относится к основанию как 2 : 1. Определите радиус вписанной окружности.
10	Найдите отношение площадей круга, описанного около равностороннего треугольника и вписанного в этот треугольник.

**Прямоугольный, равнобедренный,
равносторонний треугольники**

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника ABC при основании AC образует с основанием угол 126° . Найти величину угла ABC .
2	Найдите среднюю линию равнобедренного треугольника, параллельную его основанию, если боковая сторона равна 16 см, а периметр равен 57 см.
3	Высота равностороннего треугольника равна $7(\sqrt[4]{3})$ см. Найдите площадь треугольника.
4	Катет прямоугольного треугольника равен 4 см, а медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 2,5 см. Найдите периметр треугольника.
5	В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 30° , а боковая сторона равна $\sqrt[4]{3}$ см. Найдите площадь треугольника.
6	Высота треугольника, опущенная на его основание, составляет с одной из боковых сторон угол 60° . Найдите длину этой стороны, если длина ее проекции на основание равна $11\sqrt{3}$ см.
7	Найдите длину медианы, проведенной к боковой стороне равнобедренного треугольника, если тангенс угла при основании равен $\sqrt{7}$ см, а длина основания равна a .
8	Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 см, а угол при основании равен 30° . Определите диаметр описанной окружности.
9	Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 13 см и 84 см.
10	Радиус окружности описанной около равнобедренного треугольника с углом при вершине 120° равен $(2 + \sqrt{3})$ см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

**Прямоугольный, равнобедренный,
равносторонний треугольники**

Вариант 4

№ задания	Задание
1	В треугольнике сумма двух равных внутренних углов больше третьего на 10° . Найдите больший угол.
2	В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BM . Найдите ее длину, если периметр треугольника ABC равен 70 см, а периметр треугольника ABM равен 50 см.
3	Найдите третью сторону прямоугольного треугольника со сторонами $\sqrt{13}$ см и 7 см.
4	Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 6,5 см. Определите катеты, если сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 18 см.
5	В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 45° , а основание длиннее высоты на $9\sqrt{2}$ см. Найдите боковую сторону.
6	Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, опущенная на гипотенузу, равна 12 см, а один из катетов равен 15 см.
7	Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на части 4 см и 5 см. Найдите площадь треугольника.
8	Окружность радиуса $(3 - \sqrt{3})$ см описана около прямоугольного треугольника с острым углом 30° . Найдите его периметр.
9	Найдите периметр равнобедренного треугольника с основанием 8 см, если боковая сторона делится точкой касания вписанной в него окружности в отношении 5 : 4, считая от вершины.
10	Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной около равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 см и основанием 6 см окружностей.

**Прямоугольный, равнобедренный,
равносторонний треугольники**

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	{30; 60}	120	36	85
2	2,5	38	12,5	15
3	6,75	6	49	28
4	$3\sqrt{13}$	{4; 5}	12	{5; 12}
5	25	45	0,75	18
6	1,5	5,2	22	150
7	25	3	a	54
8	2π	1	10	6
9	1	6,4	6	26
10	7,25	4	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,625

Треугольники. Теоремы синусов и косинусов.

Треугольники и окружность

Вариант 1

№ задания	Задание
1	В треугольнике ABC сторона $BC = 2\sqrt{6}$, прилежащие к ней углы $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$. Найдите биссектрису угла B .
2	Найдите основание равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона равна 19 см, а косинус угла при вершине равен $\frac{7}{8}$.
3	В треугольнике ABC угол C равен 60° , AB равна $\sqrt{31}$ см. Точка D расположена на стороне AC так, что $AD = 3$ см. Найдите длину стороны BC , если $BD = 2\sqrt{7}$ см.
4	Найдите боковые стороны треугольника с основанием 6 см, если высоты, опущенные на боковые стороны равны 2 см и $2\sqrt{3}$ см.
5	В треугольнике ABC угол A относится к углу C как 3 : 2, $AB = 28$ см, $BC = 33$ см. Найдите $\cos \frac{C}{2}$.
6	Радиус вписанной окружности равен 2 см, точка касания делит сторону на отрезки 3 см и 4 см. Найдите площадь треугольника.
7	Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если величина угла BAC равна 60° , а расстояние от центра описанной окружности до стороны BC равно 1,3 см.
8	Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если хорда этой окружности длиной 2 см удалена от ее центра на 3 см.
9	В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{5}{11}$ высоты, опущенной на основание. Найдите длину боковой стороны треугольника, если длина основания равна 11 см.
10	Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника с углом 60° и проходит через вершину этого угла. Найдите периметр треугольника, если центр окружности лежит на гипотенузе, а ее радиус равен $\frac{3 - \sqrt{3}}{5}$ см.

Треугольники. Теоремы синусов и косинусов.

Треугольники и окружность

Вариант 2

№ задания	Задание
1	В треугольнике ABC угол A равен 30° , а угол B равен 45° . Найдите длину BC , если $AC = 10\sqrt{2}$.
2	В треугольнике ABC $AB = 2,5$ см; $AC = 8$ см; косинус угла A равен $\frac{5}{16}$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины B .
3	Угол треугольника равен 60° , длины прилежающих сторон равны 3 см и 7 см. Найдите длину биссектрисы угла.
4	Длины двух сторон треугольника равны $\sqrt{10}$ см и $\sqrt{13}$ см. Найдите длину третьей стороны, если она равна длине проведенной к ней высоты.
5	В треугольнике ABC угол A равен 60° , $AB = 1$ см, $BC = \frac{\sqrt{7}}{2}$ см. Найдите AC .
6	В треугольнике ABC длина стороны AC равна $6\sqrt{3}$ см, угол ABC равен 60° , а периметр треугольника равен $14\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до вершины B .
7	Найдите меньшую сторону треугольника с углами 85° и 50° , если радиус описанной окружности равен $\sqrt{2,5}$ см.
8	Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в три раза больше длины вписанной в него окружности. Найдите углы при основании этого треугольника.
9	В треугольнике ABC длина стороны AC равна $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ см, угол ABC равен 60° , а периметр треугольника равен $\frac{15}{\sqrt{\pi}}$ см. Найдите площадь вписанного в треугольник круга.
10	Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противоположного острого угла. Найдите радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, длина которой равна $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ см.

Треугольники. Теоремы синусов и косинусов.

Треугольники и окружность

Вариант 3

№ задания	Задание
1	В треугольнике ABC проведена медиана AK , равная $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ см составляющая со стороной AC угол 30° . Найдите длину BC , если угол $BCA = 45^\circ$.
2	Две стороны треугольника равны 8 см и 10 см, а косинус угла между ними равен $\frac{43}{160}$. Найдите третью сторону.
3	На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника BSK , если $BC = 1$, $CA = 2$.
4	Угол треугольника равен 120° , прилежащие стороны равны 3 см и 7 см. Найдите длину биссектрисы.
5	В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B , $AB = 7$ см, $AC = 9$ см. Найдите BC .
6	Найдите площадь круга, вписанного в треугольник со сторонами 7 см, 12 см и 13 см.
7	В треугольнике ABC величина угла ABC равна 45° . Вычислите длину стороны AC , если радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{8}$ см.
8	Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 5 см, 9 см, 10 см.
9	В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 5:3, считая от вершины, а боковая сторона равна 8,5 см. Найдите длину основания треугольника.
10	Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, а длины катетов равны 3 см и $2\sqrt{10}$ см.

Треугольники. Теоремы синусов и косинусов.

Треугольники и окружность

Вариант 4

№ задания	Задание
1	В треугольнике ABC величины углов при вершинах B и C соответственно равны 120° и 45° . Найдите длину AB , если $AC = 15\sqrt{6}$ см.
2	Найдите синус угла C треугольника ABC , если $AC = 4$ см, $BC = 5$ см и косинус угла BAC равен $\frac{9}{16}$.
3	Найдите косинус угла при вершине A треугольника ABC , если $AB = 30$ см, $AC = 8$ см и $CE = 11$ см, где CE – медиана.
4	В треугольнике стороны равны 4 см и 5 см, косинус угла между ними равен $\frac{3}{5}$. Найдите длину высоты проведенной к третьей стороне.
5	В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB , BC и AC соответственно в точках M , D , N . Известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, угол $BCA = 60^\circ$. Найдите MD .
6	Периметр треугольника ABC равен 9 см, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от центра вписанной окружности до вершины B , если длина стороны AC равна 3,5 см.
7	В треугольнике ABC угол ACB равен 120° . Найдите длину стороны AB , если радиус описанной окружности равен $\sqrt{75}$ см.
8	Центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат по разные стороны от прямой AB . Сторона AB равна радиусу описанной окружности, O – центр вписанной окружности. Найдите угол AOB .
9	В прямоугольном треугольнике расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности равно $\sqrt{2}$ см, а радиус описанной окружности равен 2,5 см. Найдите периметр треугольника.
10	В треугольнике со сторонами 8 см, 12 см и 12,5 см проведена окружность, касающаяся меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найдите длины отрезков, на которые центр окружности делит большую сторону.

Треугольники. Теоремы синусов и косинусов.

Треугольники и окружность

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	4	10	6,5	30
2	9,5	4	11	$\frac{3\sqrt{7}}{8}$
3	6	$2,1\sqrt{3}$	$\frac{1}{5}$	0,7
4	$\{\sqrt{6}, 3\sqrt{2}\}$	3	2,1	$\frac{16\sqrt{17}}{17}$
5	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{2}$	12	$5\sqrt{\frac{3}{7}}$
6	21	2	$6,75\pi$	2
7	2,6	$\sqrt{5}$	4	15
8	$3\sqrt{30}$	$\arccos \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$	28:75	165°
9	6,6	0,75	10,2	12
10	1,8	0,25	2,1	{5; 7,5}

**Четырехугольники. Параллелограмм, ромб,
прямоугольник, квадрат, трапеция**

Вариант 1

№ задания	Задание
1	Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали, равны 8 см и $4\sqrt{3}$ см, а острый угол между ними равен 60° .
2	Периметр параллелограмма равен 90 см, острый угол 60° . Диагональ параллелограмма делит его тупой угол в отношении 1 : 3. Найдите стороны параллелограмма.
3	Найдите высоту и площадь ромба, длины диагоналей которого равны 6 см и 8 см.
4	Диагонали ромба равны 28 см и 21 см. Найдите расстояние между сторонами ромба.
5	Сторона прямоугольника относится к диагонали как 5 : 7, а другая сторона равна 6 см. Найдите площадь прямоугольника.
6	Квадрат равновелик равнобедренному треугольнику, у которого боковая сторона вдвое больше высоты. Найти длину диагонали квадрата, если основание треугольника равно $2\sqrt{18\sqrt{3}}$ см.
7	Средняя линия трапеции равна 10 см и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите длины оснований трапеции.
8	Найдите площадь трапеции с основаниями 3 см и 5 см и углами при большем основании 60° и 30° .
9	В прямоугольной трапеции средняя линия равна 13,5 см. Найдите большую боковую сторону трапеции, если ее меньшая диагональ равна 12 см и является биссектрисой тупого угла.
10	Основания равнобокой трапеции равны 13 см и 17 см. Найдите площадь трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны.

**Четырехугольники. Параллелограмм, ромб,
прямоугольник, квадрат, трапеция**

Вариант 2

№ задания	Задание
1	Стороны параллелограмма равны 4 см и 6 см. Косинус одного из его углов равен $\frac{1}{3}$. Найдите диагональ параллелограмма, противолежащую этому углу.
2	В параллелограмме со сторонами 4 см и 7 см сумма длин диагоналей равна 16 см. Найдите диагонали параллелограмма.
3	Найдите чему равна площадь ромба, диагонали которого равны 10 и 7.
4	Периметр ромба равен 8 см, а сумма длин диагоналей 5 см. Найдите площадь ромба.
5	Перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ прямоугольника, делит прямой угол на части в отношении 3 : 1. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.
6	Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 420,5.
7	Найдите площадь трапеции с основаниями 10 см и 24 см и боковыми сторонами 13 см и 15 см.
8	Большее основание трапеции равно 24 см. Найдите ее меньшее основание, если расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.
9	В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 10 см, большая боковая сторона 8 см, а острый угол – 60° . Найдите среднюю линию трапеции.
10	В равнобокой трапеции средняя линия равна 8 см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

**Четырехугольники. Параллелограмм, ромб,
прямоугольник, квадрат, трапеция**

Вариант 3

№ задания	Задание
1	Диагонали параллелограмма, длины которых равны 30 см и 16 см, образуют угол, косинус которого равен 0,7. Найдите длину стороны параллелограмма, лежащей против этого угла.
2	Меньшая сторона параллелограмма равна 23 см. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит ее на отрезки 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.
3	Периметр ромба равен 36 см, длина одной из диагоналей $8\sqrt{2}$ см. Найдите длину другой диагонали.
4	Периметр ромба равен 200 см, а диагонали относятся как 3 : 4. Найдите площадь ромба.
5	Найти площадь прямоугольника, если его диагональ равна $3\sqrt{41}$ см, а одна из его сторон равна 15 см.
6	Точки P и Q делят стороны квадрата $ABCD$ в отношении $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AQ}{QD} = \frac{5}{2}$. Найдите отношение площадей треугольника PCQ и квадрата $ABCD$.
7	Основания трапеции равны 28 см и 11 см, боковые стороны – 25 см и 26 см. Найдите высоту трапеции.
8	Найдите длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям между боковыми сторонами, если длины оснований равны 8 см и 12 см.
9	В прямоугольной трапеции боковая сторона равна меньшему основанию и составляет с ним угол 120° . Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 4 см.
10	Диагональ равнобокой трапеции равна 5 см, площадь равна 12 см. Найдите высоту трапеции.

**Четырехугольники. Параллелограмм, ромб,
прямоугольник, квадрат, трапеция**

Вариант 4

№ задания	Задание
1	В параллелограмме одна из сторон равна $2\sqrt{3}$ см, а диагональ равна 8 см. Найдите синус угла между диагоналями, если другая диагональ составляет с данной стороной угол 60° .
2	В параллелограмме $ABCD$ величина угла BCD равна $\frac{\pi}{3}$, длина стороны AB равна a . Биссектриса угла BCD пересекает сторону AD в точке N . Найдите площадь треугольника $NCД$.
3	Длины диагоналей ромба относятся как 3 : 4, площадь равна 54 см^2 . Найдите длину стороны ромба.
4	Найдите площадь ромба, если его меньшая диагональ равна 15 см, а высота – 12 см.
5	Найдите периметр прямоугольника с площадью 84 см^2 , если одна его сторона на 5 см больше другой.
6	Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна $2\sqrt{17}$.
7	В трапеции, площадь которой равна 161 см^2 , высота равна 7 см, а разность параллельных сторон равна 11 см. Найдите длину большего основания.
8	Точка пересечения делит диагонали трапеции в отношении 1 : 3. Найдите длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям между боковыми сторонами трапеции, если длина ее средней линии равна $\frac{4}{3}$ см.
9	В прямоугольной трапеции большая диагональ равна 24 см и является биссектрисой острого угла. Найдите площадь трапеции, если расстояние от вершины тупого угла до диагонали равно 9 см.
10	Найдите периметр равнобокой трапеции с основаниями 6 см и 15 см, если ее диагональ является биссектрисой острого угла.

**Четырехугольники. Параллелограмм, ромб,
прямоугольник, квадрат, трапеция**

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	24	6	11	0,75
2	{15, 30}	{7, 9}	900	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
3		35	14	
4	16,8	2,25	2400	150
5	17,5	$\frac{\pi}{4}$	180	{7, 12}
6	6	29	$\frac{17}{28}$	34
7	{5, 15}	204	24	28,5
8	$2\sqrt{3}$	16	9,6	1
9	24	12	$10\sqrt{3}$	246,24
10	225	64	$3\sqrt{4}$	33

Четырехугольники.**Вписанные и описанные четырехугольники****Вариант 1**

№ задания	Задание
1	Вокруг параллелограмма, одна из диагоналей которого равна $7\sqrt{8}$ см описана окружность. Найдите площадь круга.
2	В ромб с острым углом 30° вписан круг. Найдите отношение площадей круга и ромба.
3	Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 8 см и 4 см. Найдите среднюю линию трапеции.
4	В равнобокую трапецию с основаниями 2 см и 18 см вписана окружность. Найдите радиус окружности.
5	Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна 12 см, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60° .
6	В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Найдите длину катета, если сторона квадрата равна $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ см.
7	В треугольник с основанием 24 см и высотой 6 см вписан прямоугольник площадью 32 см^2 так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найдите периметр прямоугольника.
8	В прямоугольный треугольник с острым углом 60° вписан ромб так, что угол 60° у них общий. Найдите стороны треугольника, если известно, что длина диагонали ромба, не содержащей общую вершину ромба и треугольника равна $\sqrt{5}$ см.
9	В окружность вписан четырехугольник с углами $120^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3} \text{ см}^2$. Найдите радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.
10	В описанном около окружности четырехугольнике сумма длин двух противоположных сторон равна 45 см. Две другие стороны относятся как 2 : 3. Найдите длину большей из этих сторон.

Четырехугольники.**Вписанные и описанные четырехугольники****Вариант 2**

№ задания	Задание
1	Площадь квадрата равна 7 см^2 . Найдите площадь вписанного круга.
2	В ромб с острым углом 30° вписан круг площадью 8 см^2 . Найдите площадь ромба.
3	В прямоугольную трапецию вписана окружность. Найдите радиус окружности, если основания трапеции равны 2 см и 3 см.
4	Найдите длину боковой стороны равнобокой трапеции, описанной около круга, если ее площадь равна 32 см^2 , а острый угол при основании равен $\frac{\pi}{6}$.
5	Основания трапеции равны 4 см и 16 см. Найдите, радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.
6	В прямоугольный треугольник с углом 30° вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Найдите длину большего катета, если длина стороны квадрата равна $12 - \sqrt{27} \text{ см}$.
7	В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 см и 5 см и диагональю 6 см. Найдите стороны треугольника, если диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.
8	В прямоугольный треугольник с острым углом 60° вписан ромб так, что угол 60° у них общий. Найдите стороны треугольника, если известно, что диагональ ромба, содержащая вершину угла 60° равна $\sqrt{3} \text{ см}$.
9	В окружность радиуса 7 см вписан четырехугольник ABCD, у которого стороны AB и BC равны. Площади треугольников ABD и BCD относятся как 2 : 1. Угол ADC равен 120° . Найдите стороны четырехугольника.
10	Длины двух противоположных сторон четырехугольника 13 см и 15 см. Найдите длины остальных сторон, если их разность 14 см, и в четырехугольник можно вписать окружность.

Четырехугольники.**Вписанные и описанные четырехугольники****Вариант 3**

№ задания	Задание
1	В окружность радиуса $7\sqrt{6}$ см ² вписан ромб. Найдите его площадь.
2	В ромб вписан круг радиуса 3 см. Найдите длину стороны ромба, если его площадь в 3 раза больше площади круга.
3	В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 6 см. Найдите стороны трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см.
4	Около окружности радиуса 1 см описана равнобокая трапеция, у которой одно основание в два раза больше другого. Найдите среднюю линию трапеции.
5	Найдите длину средней линии равнобокой трапеции с высотой 8 см, если ее боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120° .
6	В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Найдите длину стороны квадрата, если длина катета равна $18\sqrt{2}$ см.
7	В треугольник с боковыми сторонами 9 см и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллельны его боковым сторонам. Найдите длины сторон параллелограмма и основание треугольника.
8	В треугольник вписан ромб так, что один из углов у них общий, а противоположная вершина ромба делит сторону треугольника в отношении 2:3. Найдите стороны треугольника, содержащие стороны ромба, если диагонали ромба равны 6 см и $4\sqrt{3}$ см.
9	Стороны четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность равны $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CD = 6$ см, $AD = 3$ см. Найдите косинус угла $\angle ABC$.
10	Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ см, $AB = 10$ см и прямым углом при вершине C вписан в окружность. Найдите длину диагонали BD .

Четырехугольники.**Вписанные и описанные четырехугольники****Вариант 4**

№ задания	Задание
1	Площадь квадрата равна 6 см^2 . Найдите площадь описанного круга.
2	В ромб со стороной 20 см вписан круг. Найдите расстояние между точками касания, лежащих на двух смежных сторонах, образующих острый угол, если длины диагоналей ромба относятся как 4 : 3.
3	В прямоугольной трапеции острый угол равен 60° , радиус вписанной окружности – 2 см. Найдите площадь трапеции.
4	Около окружности описана равнобочная трапеция с острым углом 30° . Длина окружности 205 см. Найдите длину средней линии трапеции.
5	Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 см и 14 см и боковой стороной 10 см.
6	В квадрат с площадью 18 см^2 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 1 : 2. Найдите площадь прямоугольника.
7	В треугольник вписан параллелограмм, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, образующие угол равны 20 см и 25 см, а длины сторон параллелограмма относятся как 6 : 5. Найдите стороны параллелограмма.
8	В треугольник вписан ромб со стороной 6 см так, что один угол у них общий, а противоположная вершина лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки 4 см и 8 см. Найдите стороны треугольника.
9	В окружность радиуса 5 см вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D прямой; $AB : BC = 3 : 4$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если его площадь равна 44 см^2 .
10	В равнобочной трапеции, описанной около окружности, отношение оснований равно K . Найдите угол при основании трапеции.

Четырехугольники.

Вписанные и описанные четырехугольники

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	98π	$\frac{7\pi}{4}$	588	3π
2	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{32}{\pi}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{384}{25}$
3	$\frac{18\sqrt{5}}{5}$	1,2	{12, 20; 24}	$8+16\sqrt{3}$
4	6	8	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	400
5	$144\sqrt{3}$	$\left\{4, \frac{5\sqrt{41}}{4}\right\}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$15\sqrt{2}$
6	2,25	19,5	12	9
7	24 или 36	9; 9; $6\sqrt{2}$	6, $4\sqrt{2}$ и 18	{10, 12}
8	$\frac{3\sqrt{15}}{2}; \frac{3\sqrt{5}}{2}; 3\sqrt{5}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 3$	$\frac{5\sqrt{21}}{2}; \frac{5\sqrt{21}}{3}$	8
9	3	{ $7\sqrt{3}; 7\sqrt{3}; \sqrt{21}; 2\sqrt{21}$ }	$-\frac{1}{19}$	$14 + 6\sqrt{5}$
10	27	{7, 21}	$5\sqrt{5}$	$\arccos \frac{K-1}{K+1}$

№ задания	задание
1	Найдите угол между диаметром и хордой, проведенными из одной точки окружности, если длина хорды равна радиусу окружности.
2	Найдите длину дуги сектора, если его площадь равна 15 см; а радиус круга равен 6 см.
3	Хорды AB и BC взаимно перпендикулярны. Найдите величину угла BCA , если хорда BC стягивает дугу в 46° .
4	Окружность разделена в отношении $3 : 8 : 4$, и точки деления соединены между собой хордами. Найдите больший угол полученного треугольника.
5	Найдите расстояние от центра окружности радиуса $3\sqrt{27}$ см до хорды, если она стягивает дугу, величина которой равна 60° .
6	В сектор AOB , дуга которого содержит 60° , вписана окружность радиуса 2 см, касающаяся отрезков OA , OB и дуги AB . Найдите радиус сектора.
7	Из точки A к окружности радиуса 7,5 см проведены две касательные длиной 10 см. Найдите расстояние от точки A до хорды, соединяющей точки касания.
8	Две окружности касаются друг друга извне. Их общая касательная образует с прямой, проходящей через центры окружностей угол, равный 30° . Найдите радиус большей окружности, если расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной равно 14,25 см.
9	Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров, расположенных по разные стороны от хорды, под углами 60° и 120° . Найдите расстояние между центрами окружностей, если меньший радиус равен 7 см.
10	Через точку M диаметра окружности проведена хорда AB , образующая с диаметром угол 60° . Найдите радиус окружности, если $AM = 8$ см, $MB = 3$ см.

№ задания	Задание
1	Вписанный угол на 20° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Найдите эти углы.
2	Секущая и касательная, выходящие из одной точки, соответственно равны 40 см и 20 см. Секущая удалена от центра на 8 см. Определите радиус круга.
3	Хорды AB и AC стягивают дуги, величины которых соответственно равны 116° и 24° . Найдите величину угла BAC , если хорды лежат по разные стороны от центра окружности.
4	Величина угла ABC , образованного хордами AB и BC , равна 60° . Найдите величину дуги AB (в градусах), если $AB = 2BC$.
5	Расстояние от центра окружности до хорды равно $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ см вдвое меньше длины хорды. Найдите длину радиуса.
6	В сектор AOB , дуга которого содержит 120° , а радиус равен $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ см вписана окружность, касающаяся отрезков OA , OB и дуги AB . Найдите радиус окружности.
7	В острый угол вписана окружность радиуса 1,3 см. Найдите расстояние от вершины угла до точки касания, если расстояние между точками касания равно 2,4 см.
8	Радиусы двух окружностей равны 27 см и 13 см, а расстояние между их центрами составляет 50 см. Найдите длину их общей касательной, пересекающей линию, соединяющую центры окружностей.
9	Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна центром из их центров под углами 90° и 60° . Найдите радиус большей окружности, если центры окружностей лежат по разные стороны от хорды, а расстояние между центрами равно $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ см.
10	Через точку P диаметра окружности с центром в точке O проведена хорда AB , образующая угол 45° с диаметром. Найдите длину отрезка OP , если $AP = 12$ см, $BP = 8$ см.

№ задания	Задание
1	Вычислите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{12}$ длины окружности.
2	Найдите площадь сектора, если радиус круга равен 10 см, а центральный угол содержит 1,1 рад.
3	Хорды AB , BC , CD стягивают дуги 30° , 100° и 120° соответственно. Найдите угол BCD , если хорды лежат по разные стороны от центра окружности.
4	Величина угла между хордами AB и BC равна 164° . Найдите величину центрального угла, опирающегося на хорду AB , если $AB = BC$.
5	Расстояние от центра окружности до хорды равно $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см и вдвое меньше радиуса. Найти длину хорды.
6	В сектор AOB , дуга которого содержит 90° , вписана окружность радиуса 3 см, касающаяся отрезков OA , OB и дуги AB . Найдите радиус сектора.
7	Из точки A к окружности проведены касательная и секущая, проходящая через центр окружности. Ближайшая к A точка пересечения секущей с окружностью C соединена с точкой касания B . Найдите длину BC , если угол BAC равен 30° и расстояние от точки A до центра окружности равно 15 см.
8	Две окружности касаются друг друга извне. Две их общие касательные пересекаются под углом 60° . Найдите радиус большей окружности, если радиус меньшей окружности равен 13,5 см.
9	Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120° . Найдите радиус меньшей окружности, если расстояние между центрами окружностей равно $\frac{7(\sqrt{3}-1)}{4}$ см, а центры лежат по одну сторону от хорды.
10	Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 см и 17 см. Найдите радиус окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5 см.

№ задания	Задание
1	Хорда делит окружность на части в отношении 5:7, Найдите вписанный угол, опирающийся на меньшую из дуг, стягиваемых этой хордой.
2	Площадь сектора радиуса 12 см равна 216 см^2 . Определите его центральный угол.
3	Определите угол между хордой AB и диаметром BC , если хорда AB стягивает дугу в 54° .
4	Хорда делит окружность на две дуги, разность между которыми равна 40° . Найдите величину бóльшего вписанного угла, опирающегося на эту хорду.
5	Хорда, длина которой равна $7\sqrt{12}$ см, стягивает дугу, величина равна 120° . Найдите радиус окружности.
6	В сектор AOB вписана окружность, касающаяся отрезков OA , OB и дуги AB . Найдите угол раствора сектора, если отношение радиусов вписанной окружности и сектора составляет 1 : 3.
7	Из одной точки к окружности проведены две касательные. Длина каждой касательной равна 13 см, а расстояние между точками касания равно 24 см. Найдите радиус окружности.
8	Две окружности радиусов 6 см и 3 см касаются внешним образом. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Найдите длину этой касательной.
9	Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60° . Найдите длину хорды, если центры окружностей лежат по одну сторону от хорды, а расстояние между центрами равно $9(\sqrt{3} - 1)$ см.
10	Точка, находящиеся внутри круга радиуса 6 см, делит проходящую через нее хорду на отрезки 5 см и 4 см. Найдите расстояния от точки до окружности.

Окружность**Ответы**

№ варианта № задания				
	1	2	3	4
1	60	{20, 40}	15	75
2	5	17	55	3
3	67	110	30	63
4	96	160	16	100
5	13,5	7	15	14
6	6	$\frac{3}{2}$	$3 + 3\sqrt{2}$	60
7	8	3,12	7,5	31,2
8	28,5	30	40,5	6
9	14	0,5	3,5	18
10	7		10,625	2

Окружность, правильный многоугольник, многоугольники Вариант 1

№ задания	Задание
1	Найдите периметр кругового сектора с центральным углом 40° , если площадь сектора равна 9 см^2 .
2	В круговой сектор с центральным углом 60° вписан круг. Найдите отношение площади круга и площади сектора.
3	В круговой сектор радиуса R с центральным углом 180° вписана окружность радиуса $R/2$ и окружность, касающаяся этой окружности, дуги и радиуса сектора. Найдите площадь фигуры, ограниченной вписанными в сектор окружностями и его радиусом.
4	Найдите периметр сегмента, если его площадь равна S , а дуга содержит 90° .
5	Найдите радиус круга в сегмент которого с дугой 60° вписана окружность радиуса 2 см .
6	Внутри квадрата со стороной a на каждой его стороне как на диаметре построена полуокружность. Найдите площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.
7	Найдите отношение площади описанного около восьмиугольника круга к площади круга, вписанного в этот восьмиугольник.
8	Найдите радиус круга, если его площадь на $Q \text{ см}^2$ больше площади вписанного в него правильного двенадцатиугольника.
9	Определите, сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов равна 4320° .
10	В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной $5\sqrt{3}-\sqrt{3} \text{ см}$ наибольший из углов при вершинах A, C, F составляет 150° . Найдите площадь шестиугольника.

№ задания	Задание
1	Найдите радиус кругового сектора с центральным углом 60° , если радиус вписанного в него круга равен 3 см.
2	В круговой сектор вписана окружность, причем радиус окружности в три раза меньше радиуса сектора. Найдите центральный угол.
3	В окружность радиуса R вписаны две окружности радиуса $\frac{R}{2}$ и окружность, касающаяся внешней и двух вписанных окружностей. Найдите площадь фигуры, ограниченной вписанными окружностями.
4	Найдите площадь сегмента, если его периметр равен p , а дуга содержит 120° .
5	Найдите отношение площади круга, вписанного в сегмент с дугой 120° , к площади круга, вписанного в сегмент того же круга с дугой 60° .
6	Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки 2 см и 23 см. Найдите радиус окружности.
7	Радиус описанной около правильного восьмиугольника окружности равен 2 см. Найдите радиус вписанной в этот восьмиугольник окружности.
8	Найдите отношение длин диагоналей правильного восьмиугольника.
9	В выпуклом пятиугольнике сумма двух внутренних углов равна 120° , остальные углы относятся между собой как 6:7:8. Найдите больший угол.
10	В выпуклом равностороннем пятиугольнике $ABCDE$ со стороной $7\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ см угол при вершине A – прямой, а сторона BC перпендикулярна диагонали BE . Найдите площадь четырехугольника $BCDE$.

№ задания	Задание
1	Периметр кругового сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 см^2 . Определите длину дуги сектора.
2	Найдите центральный угол кругового сектора, если радиус вписанной в него окружности в 2,5 раза меньше радиуса сектора.
3	В окружность радиуса R вписаны шесть равных окружностей, каждая из которых касается данной и двух соседних. Вычислите площадь фигуры, ограниченной этими шестью окружностями.
4	Найдите отношение периметров сегментов с углами 90° и 120° .
5	Найдите радиус круга, в сегмент которого соответствующей хорде $8\sqrt{5}$ см, вписан круг радиуса 2 см.
6	В круг радиуса R вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Найдите площадь общей части треугольника и квадрата.
7	Найдите отношение площади четырехугольника, описанного около окружности к площади шестнадцатиугольника, вписанного в эту окружность.
8	Найдите число сторон правильного многоугольника, если отношение длины описанной около него окружности к длине стороны многоугольника равно $\pi\sqrt{2}$.
9	Определите меньший внутренний угол выпуклого пятиугольника, зная, что величины углов относятся как $1 : 1,5 : 2 : 2,5 : 3$.
10	В выпуклом равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах A, C, E – прямые. Найдите площадь шестиугольника, если его сторона равна $3\sqrt{3} - \sqrt{3}$ см.

№ задания	Задание
1	Площадь кругового сектора радиуса 6 см равна 4π см ² . Найдите центральный угол.
2	Найдите центральный угол кругового сектора, если радиус вписанной в него окружности в 3,5 раза меньше радиуса сектора.
3	Окружность радиуса R проходит через центр другой окружности. Точки пересечения окружности радиуса R с другой окружностью находятся на диаметре окружности радиуса R . Найдите площадь фигуры, ограниченной этими окружностями.
4	Найдите отношение площадей сегментов окружности с дугами 60° и 120° .
5	Найдите отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугой 180° к площади квадрата, вписанного в сегмент того же круга с дугой 90° .
6	Окружность радиуса 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата.
7	Найдите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник. Если площадь шестиугольника равна $60\sqrt{3}$ см ² .
8	Найдите длину стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{5}+1$ см.
9	В выпуклом пятиугольнике два внутренних угла – прямые, а остальные относятся между собой как 3:4:5. Найдите больший угол.
10	В выпуклом равностороннем пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и E прямые. Найдите площадь пятиугольника, если его сторона равна $5\sqrt{4-\sqrt{7}}$ см.

Окружность

Ответы

№ варианта № задания	1	2	3	4
1	$2\pi + 18$	9	14	40
2	$2 : 3$	60	$2 \arcsin \frac{2}{3}$	$2 \arcsin \frac{2}{5}$
3	$\frac{3R^2(7-4\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$	$\frac{(4-\pi)(3-2\sqrt{2})}{2} R^2$	$\frac{2R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$	$R^2(\pi-1)$
4	$(\pi+2\sqrt{2})\sqrt{\frac{S}{\pi-2}}$	$\frac{3p^2(4\pi-3\sqrt{2})}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}$	$\frac{3(2\sqrt{2}+\pi)}{2(3\sqrt{3}+2\pi)}$	$\frac{3+\pi}{3\sqrt{3}+2\pi}$
5	$8(2+\sqrt{3})$	$7+4\sqrt{3}$	12	$10 : 1$
6	$\frac{a^2(\pi-2)}{2}$	17	$\frac{R^2(8\sqrt{3}-9)}{4}$	$\{1; 17\}$
7	$4-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$	30π
8	$\sqrt{\frac{Q}{\pi-3}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}} : (1+\sqrt{2}) : \sqrt{2+2\sqrt{2}}$	4	12
9	26	160	54	150
10	75	61,25	27	56,25

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ К РАЗДЕЛУ 9

ТЕСТ 1

№ задания	Задание
1	Верно ли, что треугольник ABC со сторонами $AB = 1$, $BC = a$, $AC = 0,8$ и углом $B = 30^\circ$ остроугольный?
2	Верно ли, что если в треугольнике ABC углы A и B равны, то угол C меньше $\frac{\pi}{2}$?
3	Верно ли, что если в прямоугольном треугольнике ABC катет AB равен катету AC , то угол B равен половине угла A ?
4	Верно ли, что если в треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B , то сторона BC меньше удвоенной стороны AC ?
5	Верно ли, что все медианы равнобедренного треугольника равны?
6	Верно ли, что треугольник, у которого центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности, является равносторонним?
7	Верно ли, что в равностороннем треугольнике медиана и ось симметрии, проведенные через одну и ту же вершину, совпадают?
8	Верно ли, что если точка пересечения высот треугольника принадлежит треугольнику, то треугольник прямоугольный?
9	Верно ли, что в равностороннем треугольнике совпадают точка пересечения медиан и точка пересечения биссектрис?
10	Верно ли, что треугольник ABC со стороной $AB = 1$, $BC = a$, углом $B = 30^\circ$ и площадью 1 является тупоугольным?
11	Верно ли, что если сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 1, то наибольшее значение площади треугольника меньше 0,5?
12	Верно ли, что у всякого равнобедренного треугольника хотя бы один угол больше 70° ?
13	Верно ли, что если каждая сторона равна проведенной к ней высоте, то треугольник является равносторонним?
14	Верно ли, что если у треугольника есть ось симметрии, то он является равнобедренным?

15	Верно ли, что если квадрат одной из сторон треугольника равен разности квадратов двух других его сторон, то треугольник является прямоугольным?
16	Верно ли, что если все средние линии треугольника равны, то треугольник является равносторонним?
17	Верно ли, что треугольник, вершины которого находятся на концах ребер куба, выходящих из одной вершины, является равнобедренным?
18	Верно ли, что периметр равнобедренного треугольника ABC со сторонами 1 и a и углом между ними 30° , больше 3?
19	Верно ли, что если один катет прямоугольного треугольника в два раза больше другого, то гипотенуза треугольника больше удвоенной высоты, проведенной на нее?
20	Верно ли, что если все медианы треугольника равны, то треугольник является равносторонним?
21	Верно ли, что в четырехугольнике $ABCD$, у которого $\angle A = \angle B = 60^\circ$, $\angle D = 90^\circ$ и $BC = CD = 1$, можно вписать окружность?
22	Верно ли, что в квадрате существует точка, из которой каждая его сторона видна под прямым углом?
23	Верно ли, что в ромбе $ABCD$ со стороной 1 и углом $\angle BAD > 100^\circ$, $AC > BD$?
24	Верно ли, что в прямоугольнике $ABCD$, у которого $AD = 2$, $AB = 1$ существует такая точка M , что $\angle AMB = \angle CMD$?
25	Верно ли, что в прямоугольной трапеции $ABCD$, у которой $AB = BC = 1$, $AD = 2$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, наибольшей стороной является AD ?
26	Верно ли, что в четырехугольнике $ABCD$, у которого $BC = CD = 1$, $\angle A = \angle B = 60^\circ$, $\angle D = 90^\circ$, диагонали взаимно перпендикулярны?
27	Верно ли, что любой параллелограмм можно разбить на четыре равных между собой треугольника?
28	Верно ли, что на сторонах квадрата существуют три точки, которые являются вершинами равностороннего треугольника?
29	Верно ли, что если радиус окружности, вписанной в ромб $ABCD$ со стороной равной 1, равен 0,5, то $\angle BAD$ – тупой?
30	Верно ли, что в прямоугольнике $ABCD$, у которого $AD = 2$, $AB = 1$, существует такая точка M , что $MA = 1$ и $\angle MAB = 45^\circ$?

31	Верно ли, что радиус описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ со сторонами $AB = BC = CD = 1, AD = 2$, больше 1?
32	Верно ли, что не существует параллелограмма, имеющего ось симметрии?
33	Верно ли, что в четырехугольнике $ABCD$ со сторонами $BC = CD = 1$ и углами $\angle A = \angle B = 60^\circ, \angle D = 90^\circ, AC > BD$?
34	Верно ли, что если $\angle BAD$ ромба $ABCD$ со стороной равной 1 больше 30° , то его площадь меньше 1?
35	Верно ли, что правильный n -угольник ($n > 4$) имеет столько же вершин, сколько и сторон?
36	Верно ли, что правильный n -угольник ($n > 4$) имеет не меньше n осей симметрии?
37	Верно ли, что множество точек, удаленных от данной точки на данное ненулевое расстояние, называется окружностью?
38	Верно ли, что уравнение $(x + a)^2 + (y + b)^2 = 1$ является уравнением окружности при любых a и b ?
39	Верно ли, что хорды данной окружности равны, если они имеют общий конец на этой окружности и из некоторой точки окружности эти хорды видны под равными углами?
40	Верно ли, что если две, не имеющие общих точек, хорды одного и того же круга равны, то через концы этих хорд всегда проходят две равные пересекающиеся хорды?

ТЕСТ 2

№ задания	Задание
1	Верно ли, что если треугольник ABC со сторонами $AB = 1$, $BC = a$ и углом 30° между ними, остроугольный, то он не является равнобедренным?
2	Верно ли, что если угол C треугольника ABC больше суммы углов A и B , то треугольник является тупоугольным?
3	Верно ли, что если биссектриса одного из углов треугольника равна одному из отрезков, на которые она делит противоположную данному углу сторону и в два раза меньше другого из этих отрезков, то треугольник является прямоугольным?
4	Верно ли, что в равностороннем треугольнике точка, равноудаленная от всех сторон, и точка равноудаленная от всех средних линий, совпадают?
5	Верно ли, что если разность углов A и B треугольника ABC равна 90° , то разность сторон, противолежащих этим углам больше половины третьей стороны.
6	Верно ли, что если вершины треугольника находятся в вершинах квадрата, то треугольник является равнобедренным?
7	Верно ли, что если одна из сторон треугольника в два раза больше одной из его медиан, то треугольник является прямоугольным?
8	Верно ли, что у всякого равнобедренного треугольника три средних линии образуют равнобедренный треугольник?
9	Верно ли, что если разность катетов прямоугольного треугольника равна 1, то радиус описанной окружности больше 0,5?
10	Верно ли, что в равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают?
11	Верно ли, что треугольник является равнобедренным, если у него равны все стороны?
12	Верно ли, что если стороны прямоугольного треугольника равны 1 и a , а угол между ними равен 30° , то его площадь больше 0,25?
13	Верно ли, что всякий равнобедренный треугольник имеет одну ось симметрии?
14	Верно ли, что медиана, проведенная на больший

	катет прямоугольного треугольника, больше медианы, проведенной на меньший катет?
15	Верно ли, что в равностороннем треугольнике точка, равноудаленная от середин всех сторон, и точка, равноудаленная от всех вершин, совпадают?
16	Верно ли, что треугольник, у которого равны две стороны и два угла, является равносторонним?
17	Верно ли, что треугольник, у которого точка, равноудаленная от всех его вершин, лежит на стороне, является прямоугольным?
18	Верно ли, что у всякого равнобедренного треугольника, центр описанной окружности находится в треугольнике?
19	Верно ли, что если угол A треугольника ABC больше угла B , то высота, проведенная из вершины A , больше высоты, проведенной из вершины B ?
20	Верно ли, что если одна из биссектрис треугольника является его высотой, то треугольник является равнобедренным?
21	Верно ли, что в четырехугольнике $ABCD$ со сторонами $BC = CD = 1$ и углами $\angle A = \angle B = 60^\circ$ и $\angle D = 90^\circ$, есть ось симметрии?
22	Верно ли, что в квадрате существуют две точки на соседних сторонах, расстояние между которыми равно стороне квадрата?
23	Верно ли, что в прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD = 2$, $AB = 1$ существует точка M такая, что $MB = MC$ и $\angle CMB = 90^\circ$?
24	Верно ли, что если площадь ромба $ABCD$ со стороной 1, равна 1, то его диагонали перпендикулярны?
25	Верно ли, что в квадрате существуют четыре точки на сторонах, кроме их середин, которые являются вершинами другого квадрата?
26	Верно ли, что около четырехугольника $ABCD$ со сторонами $BC = CD = 1$ и углами $\angle A = \angle B = 60^\circ$, $\angle D = 90^\circ$, можно описать окружность?
27	Верно ли, что в прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD = 2$, $AB = 1$ существует точка M такая, что $\angle AMD = \angle CMB$?
28	Верно ли, что найдется такой параллелограмм, в который можно вписать окружность, но около которого нельзя описать окружность?
29	Верно ли, что в прямоугольной трапеции $ABCD$, у

	которой $AB = BC = 1$, $AD = 2$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, диагонали перпендикулярны?
30	Верно ли, что если радиус описанной около ромба $ABCD$ окружности равен 1, то радиус его вписанной окружности равен 0,5?
31	Верно ли, что у прямоугольной трапеции $ABCD$, у которой $AB = BC = 1$, $AD = 2$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, существует вписанная окружность?
32	Верно ли, что четырехугольник, диагональ которого делит его на два равных треугольника, является параллелограммом?
33	Верно ли, что в прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD = 2$, $AB = 1$ существует точка M такая, что $MB = MD$, $\angle AMD$ – острый?
34	Верно ли, что площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ со сторонами $AB = BC = 1$, $AD = 2$ и углами $\angle A = \angle B = 90^\circ$, больше 1?
35	Верно ли, что любой правильный n -угольник ($n > 4$) имеет центр симметрии?
36	Верно ли, что у каждого правильного n -угольника ($n > 4$) найдутся n равных диагоналей?
37	Верно ли, что множество точек плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом, является окружностью?
38	Верно ли, что уравнение $x^2 + y^2 = 1$ является уравнением окружности?
39	Верно ли, что хорды одного и того же круга равны, если из некоторой точки окружности, не являющейся концом хорды, они видны под равными углами?
40	Верно ли, что найдутся две хорды окружности, имеющие общий конец на этой окружности такие, что одна из хорд видна из некоторой точки окружности под углом 40° , а другая под углом 140° ?

Ответы к тестам

Тест 1				Тест 2			
№ задания	ответ	№ задания	ответ	№ задания	ответ	№ задания	ответ
1	нет	21	нет	1	нет	21	нет
2	нет	22	да	2	да	22	да
3	да	23	нет	3	нет	23	да
4	да	24	да	4	да	24	да
5	нет	25	да	5	да	25	да
6	да	26	нет	6	да	26	нет
7	да	27	да	7	да	27	да
8	да	28	да	8	да	28	да
9	да	29	нет	9	да	29	нет
10	да	30	да	10	да	30	нет
11	да	31	нет	11	да	31	нет
12	нет	32	нет	12	нет	32	да
13	да	33	нет	13	да	33	нет
14	да	34	да	14	нет	34	да
15	да	35	да	15	да	35	нет
16	да	36	да	16	нет	36	да
17	да	37	да	17	да	37	да
18	нет	38	да	18	нет	38	да
19	да	39	да	19	нет	39	да
20	да	40	да	20	да	40	нет