ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра физики. Лаборатория молекулярной физики

ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания к лабораторной работе № 100

Издание **третье** переработанное

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2000

Иженерный эксперимент связан с измерениями величин, и его качество зависит от точности и надежности результатов измерений. Измерения низкого качества и неправильный учет действия многих факторов приводят к нежелательным последствиям, особенно на железнодорожном транспорте с его большими скоростями передвижения транспортных средств, огромными людскими потоками и потенциальной опасностью для здоровья и жизни людей.

Современный инженер-железнодорожник должен уметь: 1) организовать эффективное выполнение измерений так, чтобы их точность соответствовала поставленной цели; 2) учитывать действие различных факторов на измеряемую величину или исследуемое явление и по возможности принимать меры для **их** устранения; 3) анализировать результаты измерений и делать правильные выводы;

4) оценивать точность и надежность окончательных результатов измерений;

5) обобщать полученные результаты в виде графиков, эмпирических соотношений, сравнивать с теорией и т.д.

Аналогичные задачи ставит перед студентами лабораторный практикум по физике по ВТУЗе, знакомя будущих инженеров с физическими явлениями и их техническими приложениями. В этом плане учебная исследовательская работа студентов в физических лабораториях в значительной мере способствует успешному решению указанных выше проблем и является надежной научной базой в **их** будущей инженерной деятельности. Известно также, что физические методы исследования активно и творчески используются в различных областях техники и обеспечивают там существенный прогресс. Поэтому будущим специалистам необходимо знать, каков общий метод физики. Правильное представление о нем студенты получают в процессе работы в лабораториях кафедры физики. Физика - наука о природе. Любое явление природы связано с другими множеством связей, из которых выделяются наиболее важные, и на их основе создается теория. Неучтенные связи приводят к отклонениям результатов физических измерений от закономерностей теории. Эти отклонения называют случайными явлениями. С развитием науки, совершенствованием методики и техники измерений удается учесть все большее число неконтролируемых ранее связей, что способствует дальнейшему развитию теории и более глубокому пониманию природы. Лабораторный физический практикум учит, таким образом, как следует проверять теории, каковы взаимоотношения теории и эксперимента и закладывает основы методов обобщения экспериментальных результатов в виде теоретических предположений.

Цель настоящей работы - ознакомление с методикой измерения физических величин с помощью наиболее широко используемых приборов, в том числе и на железнодорожном транспорте, а также с основами методики обработки результатов измерения.

1. ИСТИННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ РАЗБРОС.

Предположим, что на результат измерения оказывают действие только случайные факторы, учесть которые невозможно (неконтролируемые, неучтенные факторы). Любую количественную характеристику результата опыта называют случайной величиной (длина, масса, ток, напряжение и т.д.). При многократном измерении случайной величины получаются разные ее значения вследствие действия случайных факторов (при этом контролируемые факторы не изменяются). С каждым из возможных результатов опыта связывают особую числовую меру объективной возможности его появления и называют вероятностью. Итак, измеренные значения случайной величины, группируясь в определенной области, встречаются с некоторой вероятностью. Считается, что случайная величина имеет некоторое распределение вероятности. Любую определяемую на опыте величину как величину случайную обозначим через X. Если случайные факторы независимы друг от друга, что как правило, имеет место что величина X теоретически подчиняется нормальному (гауссовскому) закону распределения вероятности, вписываемому функцией вида:

$$f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2ps^2}} \exp\left[-(x-x_0)^2/2s^2\right]dx \qquad (1)$$

Здесь ***x*** - числовое значение определяемой величины X;

X_0 и σ – параметры распределения**;**

f(x) – плотность вероятности (вероятность, что значение ***x*** принадлежит некоторому единичному интервалу значений ***x***);

f(x)dx – вероятность, что значение ***x*** лежит в интервале от ***x*** до ***x+dx*** **,** и она численно равна заштрихованной (рис. 1) площади.

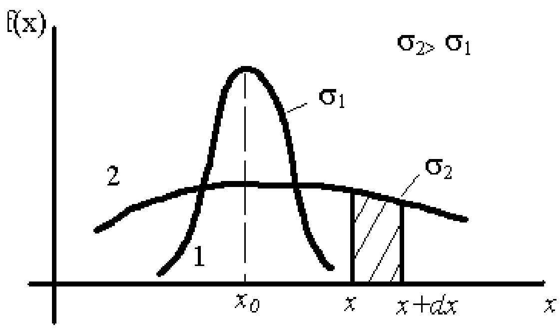


Рис 1. Нормальное (гауссовское) распределение

Коэффициент перед экспонентой в выражении (I) выбран таким образом, чтобы площадь под любой на кривых (рис.1) была равна единице. Параметр ***x_0*** называется математическим ожиданием случайной величины ***x*** , он равен значению ***x***, отвечающему максимуму плотности вероятности ***f(x)***. Параметр σ называется средним квадратическим (стандартным) отклонением величины ***x*** от ее математического ожидания ***x***. И характеризует меру ее разброса относительно ***x_0***. Чем больше σ, тем больше этот разброс (рис. I, кривые I и 2),

При наличии только случайных факторов, действующих на определяемую величину, можно ожидать, что измеренные значения ***x*** с наибольшей вероятностью (чаще) будут лежать вблизи значения ***x_0*** , что дает основание считать ***x_0*** истинным значением определяемой величины ***x***.

2. ВИДЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ.

Полученная в процессе измерений совокупность ***n*** значений определяемой величины ***x***

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$$

называется выборкой объемом ***n***. Истинное значение ***x_0*** определяемой величины ***x*** при этом остается неизвестным, неизвестным является также и отклонение ***x_i-x_0*** для каждого из измерений. Отсюда следует, что измерения носят приближенный характер. Неточность измерений характеризуют погрешностью. При выполнении измерений необходимо знать, какого рода возникают погрешности, каковы их причины, и как в каждом конкретном случае их исключить или учесть. Природа погрешностей и причины их весьма разнообразны. Погрешности измерений можно подразделить на три группы: грубые, систематические и случайные (статистические). Обычно такого подразделения придерживаются в лабораторном практикуме по физике и оно находит широкое практическое применение в инженерном эксперименте и производственной практике, в частности, при проведении различных измерений на железнодорожном транспорте.

Грубые погрешности (промахи) обусловлены невнимательностью, отсутствием соответствующей квалификации экспериментатора. Они могут возникать в результате неустойчивой работы установки или отдельного прибора. Устраняются путем повторных измерений или снятием показаний другим наблюдателем.

Систематические погрешности вызываются действием факторов, не изменяющихся от опыта к опыту. Их абсолютное значение и знак либо известны, либо могут быть определены. Более подробная информация о грубых и систематических погрешностях изложена в п.6.

Случайные (статистические) погрешности вызываются действием случайных неконтролируемых факторов, дающих с равной вероятностью отклонения в положительную и отрицательную стороны. Подробно природа и источники случайных погрешностей обсуждались в пп. 2 и 3.

Измеренные значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ определяемой величины x отличаются друг от друга и от истинного значения x_0 из-за наличия погрешностей в каждом отдельном измерении.

Что следует считать результатом измерений? Из теории следует, что наилучшей оценкой истинного значения x_0 определяемой величины x является выборочное среднее x является выборочное среднее $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2)$$

Рассмотрим различные варианты распределения результатов измерений, нанося результаты (в выбранном масштабе) на числовую ось x (рис.2). Вертикальные черточки изображают отдельные результаты.

Предположим, что истинное значение x_0 известно. Тогда из рис.2 видно, что случайные погрешности проявляются в ситуациях а, б, в. Соотношение между случайной и систематической погрешностями совершенно различно: на распределения результатов в случае в**,** г существенное влияние оказывает систематическая погрешность, тогда как ее роль в распределении а, б значительно меньше по сравнению с влиянием случайной погрешности. Отличительной особенностью выборки (рис.2,г) является ее нечувствительность к действию случайных факторов, поэтому многократно появляется один и тот же результат. Для этой выборки следует считать, что

$$x_{изм.} = x_1 = x_2 = \ldots = x_7$$

а погрешность определить по характеристикам прибора (см. пп.5 и 6).

В действительности, рассмотренные (рис.2) ситуации различить на практике довольно трудно, так как истинное значение x_0 и отклонения $x_i - x_0$ остаются неизвестными. Если систематическая погрешность сравнима или значительно превосходит случайную, то среднее выборочное $\bar{x}$ существенно сдвигается в определенном направлении относительно x_0 (рис. 2, в, г). Как учесть или исключить влияние систематической погрешности, рассмотрено в п.6.

3. РАЗБРОС РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ИСТИННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПРЕДЕЛЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

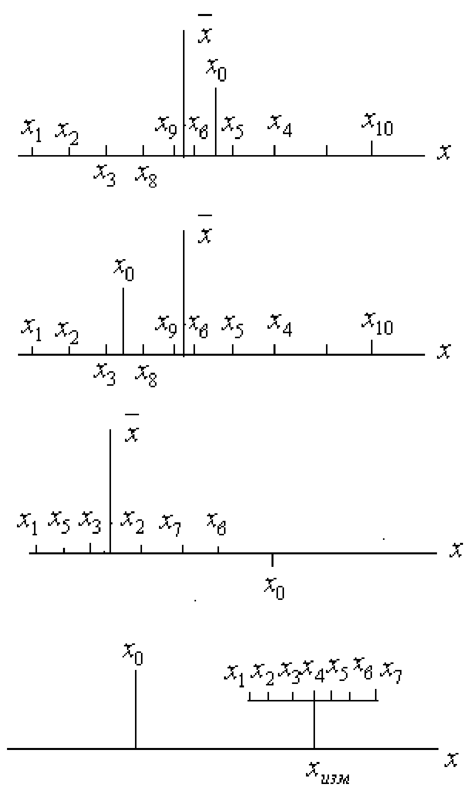
Рассмотрим методику обработки результатов измерений, когда систематическая погрешность настолько мала по сравнению со

а)

б)

в)

г)



$$x_{изм} = x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_7$$

Рис.2. Различные варианты распределения результатов измерений определяемой величины X

случайной, что ею можно пренебречь при оценке истинного значения и степени разброса результатов измерений определяемой величины.

Если в качестве оценки истинного значения определяемой величины получено число, то такая оценка называется точечной и она требует указания точности и надежности полученного результата.

Наиболее простой случай когда параметр σ известен. Тогда вероятность P того, что полученное значение $\boldsymbol{x}$ отклонится от истинного значения $\boldsymbol{x_0}$ влево или вправо на определенную величину, может быть найдена интегрированием выражения (I). Если эти отклонения составляют σ, 2σ, 3σ, то соответствующие вероятности $\boldsymbol{P}_{\sigma}$, $\boldsymbol{P}_{2\sigma}$, $\boldsymbol{P}_{3\sigma}$ равны

$$\boldsymbol{P}_{\sigma}\ (|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}| \le \sigma) = 0{,}683$$

$P_{2\sigma}$ ($|x-x_0| \le 2\sigma$) = 0,954
$P_{3\sigma}$ ($|x-x_0| \le 3\sigma$) = 0,998

Это равносильно тому, что

P_{σ} ($x-\sigma \le x_0 \le x+\sigma$) = 0,683
$P_{2\sigma}$ ($x-2\sigma \le x_0 \le x+2\sigma$) = 0,683
$P_{3\sigma}$ ($x-3\sigma \le x_0 \le x+3\sigma$) = 0,683

Последняя форма записи означает, что промежутки **(** $x-\sigma$, $x+\sigma$ **)**, **(** $x-2\sigma$, $x+2\sigma$**)**, **(** $x-3\sigma$, $x+3\sigma$**)**, с случайными концами будут содержать неизвестное истинное значение x_0 с вероятностью, равной соответственно 0,683: 0,954: 0,998.
Итак, зная величину σ, можно оценить истинное значение x_0 с любой наперед заданной вероятностью на основании одного измерения. Однако точное значение σ, как правило, неизвестно. По многократным измерениям $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n$ можно получить приближенную оценку параметра σ в виде выборочного среднего квадратичесного отклонения $S(x)$ отдельного измерения:

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (3)$$

Чем больше число измерений n , тем ближе $S(x)$ к σ и оно совпадает с σ при бесконечно большом n. Практически же число измерений ограничено, и приведенный выше метод вносит сильные искажения в результаты.
При небольшом числе измерений, начиная с двух, в теории погрешностей применяется специальный метод оценки истинного значения определяемой величины. Он основан на использовании распределения Стьюдента - распределения случайной величины t :

$$t = \frac{(\bar{x}-x_0)\sqrt{n}}{S(x)}$$

Это распределение не зависит от x_0 и σ. На рис. 3 приведено типичное распределение Стьюдента, описываемое колообразной Кривой, симметричной относительно оси t = 0

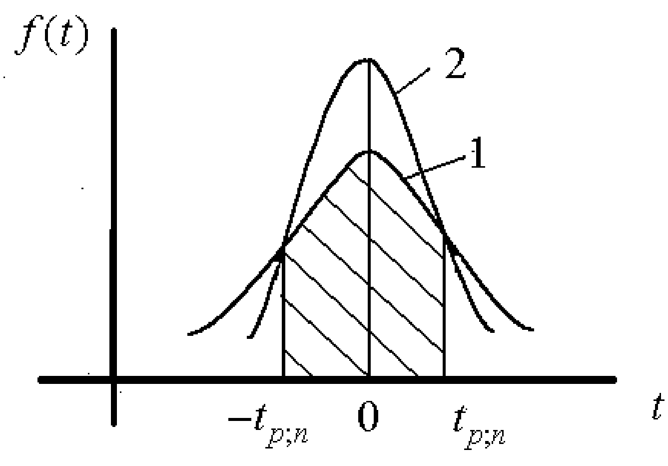


Рис.3. Распределение Стьюдента - кривая 1; стандартное распределение Гаусса—

кривая **2;** *f(t)***-** плотность вероятности .

Для сравнения на том же рисунке нанесена кривая стандартного распределения Гаусса (t=0, σ = 1):

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\exp(-\frac{t^2}{2})$$

Из рис. 3 видно, что распределение Стьюдента шире распределения Гаусса. С увеличением числа измерений $\boldsymbol{n}$ кривая Стьюдента стремится к совпадению с кривой Гаусса, и при $\boldsymbol{n}=\infty$ распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

Пусть вероятность того, что $|\boldsymbol{t}|\le \boldsymbol{t_{pin}}$ равна P (на рис.3 величина P равна заштрихованной площади). Тогда

$$\left|\frac{\bar{x}-x_0}{s(x)/\sqrt{n}}\right|\le t_{pin}$$

Это неравенство эквивалентно двойному неравенству

$$\bar{x}-\frac{s(x)}{\sqrt{n}}t_{pin}\le x_0\le \bar{x}+\frac{s(x)}{\sqrt{n}}t_{pin} \qquad (4)$$

Величина $\boldsymbol{t_{pin}}$ называется квантилем распределения Стьюдента и определяется числом измерений $\boldsymbol{n}$ и задаваемой вероятностью P.

Выборочным средним квадратическим отклонением для выборочного среднего $\bar{x}$ называют величину

$$S(\bar{x})=\frac{S(x)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (5)$$

Произведем несколько выборок, каждая из которых объемом $\boldsymbol{n}$. Вычислим для них выборочные средние, они являются значением случайной величины $\bar{x}$. Последняя распределена нормально с тем же математическим ожиданием $\boldsymbol{x_0}$, что и величина $\boldsymbol{x}$, но с параметром

$$s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

т.е. в $\sqrt{n}$ раз меньшим параметра $\sigma(x)$ **.** Параметр $s(\bar{x})$ называется средним квадратическим отклонением случайной величины $\bar{x}$ от ее математического ожидания $\boldsymbol{x_0}$, его приближенной оценкой служит величина $S(\bar{x})$. Величина $\boldsymbol{x_0}$ является истинным значением как определяемой величины $\boldsymbol{x}$, так и ее среднего $\bar{x}$, а так как выборочное среднее $\bar{x}$ имеет в $\sqrt{n}$ раз меньший разброс, чем единичное измерение $\boldsymbol{x}$, то оценку истинного значения $\boldsymbol{x_0}$ лучше проводить по выборочному среднему. Это обстоятельство наряду с неизвестностью σ требует проведения многократных измерений.

Запишем неравенство (4) с учетом формулы (5) в виде

$$\bar{x}-S(\bar{x})t_{pin}\le x_0\le \bar{x}+S(\bar{x})t_{pin} \qquad (6)$$

Оно определяет интервал $[\bar{x} - S(\bar{x})t_{pin}, x_0 \le \bar{x} + S(\bar{x})t_{pin}]$ с случайными концами, который с вероятностью P содержит истинное значение x_0 определяемой величины x. Этот интервал называется доверительным, а вероятность P называют доверительной вероятностью или надежностью результата. Величину доверительного интервала часто записывают в краткой форме

$$x_0 = \bar{x} + S(\bar{x})t_{pin} \qquad (7)$$

Выражения (6) и (7) являются математическим выражением интервальной оценки истинного значения определяемой величины.

Допустим, что измерения выполняются так, что их результаты обладают одинаковой надежностью, но разной точностью. Это означает, что величина P остается постоянной, а длина доверительного интервала изменяется. При этом чем больше число измерений n , тем меньше $S(\bar{x})$ и t_{pin} , тем уже доверительный интервал (формулы (6) или (7)), а значит, точность результата измерений выше. Теперь истинное значение x_0 оценивается одним и тем же доверительным интервалом при различном числе измерений n. С увеличением n величина уменьшается и доверительный интервал останется без изменения, если возрастает $S(\bar{x})$ t_{pin} (формулы (6) или (7)) . Теория показывает, что возрастание t_{pin} означает увеличение доверительной вероятности P . Отсюда следует, что оценка одним и тем же интервалом становится более надежной при большем числе намерений.

Итак, интервальная оценка (6) или (7) истинного значения x_0 определяемой величины x становится надежнее и точнее с увеличением числа измерений n.

4. ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При измерениях величин в лабораторном практикуме принимаются во внимание из систематических погрешностей, как правило, приборные как легко учитываемые. Они определяются либо как половина цены деления шкалы прибора, либо по классу точности приборов, если последний указан среди приборных характеристик (п.6.). Тогда в погрешность Dx определяемой величины **X** входят две составляющие: случайная (статистическая) $Dx_{случ}$ и систематическая приборная) $Dx_{приб}$ (предполагается, что промахи исключены), так что

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{случ.})^2 + (\Delta x_{приб.})^2}$$

Если приборная погрешность значительно больше случайной, то при многократных измерениях практически получается один и тот же результат (см.рис.2,г). Этот недостаток присущ, в основном, стрелочным приборам. **Их** подвижная часть, связанная со стрелкой, настолько бывает инерционной, что не реагирует на малые случайные отклонения, либо эти отклонения настолько малы в пределах деления шкалы, что их трудно зарегистрировать. Такой прибор мы будем называть грубым.

Точность измерений характеризуют относительной погрешностью

$$K_x = \left| \frac{x - x_0}{x_0} \right|$$

где x - измеренное значение.

Чем меньше абсолютная погрешность x-x_0, тем меньше относительная погрешность K_x и выше точность измерений (она обратно пропорциональна K_x).

Рассмотрим многопредельный прибор (имеет несколько диапазонов измерений). В п.6 показано, что точность измерения будет выше в том диапазоне, в котором отсчет $\boldsymbol{x_i}$ будет ближе к нормирующему значению $\boldsymbol{D}$ (максимальному отсчету в данном диапазоне). Прибор с таким диапазоном называют точным, все другие возможные диапазоны будут обладать больнимм приборными погрешностями и соответственно меньшими точностями. Итак, многопредельный прибор характеризуется различной степенью точности в зависимости от выбранного предела измерений; имеются грубая и точная шкалы. Может, однако, оказаться, что на самой точной шкале приборная погрешность будет значительно превосходить случайную, поэтому многопредельный прибор в целом будет грубым прибором. Точный прибор характеризуется меньшей систематическое (приборной) погрешностью по сравнению с случайной, и поэтому на распределении полученных с его помощью результатов измерений сказывается случайный разброс (см.рис.*2*,а,б). Точными приборами являются цифровые: вольтметры, электронные секундомеры и весы, измерители сопротивлений, емкостей и индуктивностей и т.д. Полученные с их помощью $\boldsymbol{n}$ измерений одной и той же величины при неизменных контролируемых условиях следует обрабатывать как прямые многократные измерения(см.п.5).При этом значения определяемой величины, как правило, выставляются (задаются) по шкалам грубого прибора, а затем многократно измеряются точным прибором. В случае многопредельного прибора можно изучить, какова роль приборной погрешности и какова точность отсчета в зависимости от диапазона измерений. Для этого выбирают (указываются преподавателем) значения исследуемой величины, не превосходящие и лежащие вблизи предельного значения для наименьшего диапазона, затем выставляют эти значения на самой грубой шкале (с наибольшим диапазоном) и, последовательно переключая на более точную шкалу, производят по ней отсчеты, указывая для них приборную погрешность (см.п.5, п.1.8.1).

Если измерения производят с помощью грубого и точного приборов, то необходимо исключить промахи (просчеты), связанные с отсутствием навыков измерения. Особое значение это имеет в плане уменьшения различия в показаниях механического и электронного секундомеров, обусловленного реакцией исследователя и проявляющегося в неодновременности как включения, так и выключения счетного устройства. Только после нескольких измерений отрезков времени (длительностью, например 60 с) с помощью электронного секундомера удается фиксировать их с погрешностью в несколько сотых секунды. Просчетов на механическом секундомере в силу его большой систематической (приборной) погрешности избежать значительно легче.

Перед проведением статистического анализа целесообразно проверить, не изменяются ли измеренные значения регулярным образом со временем. Такое изменение называют дрейфом. Для выяснения этого вопроса необходимо построить график зависимости результатов измерения от времени (рис.4). На горизонтальной оси

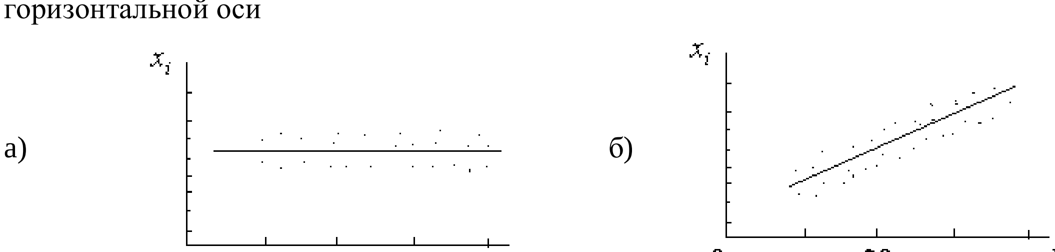


Рис .4. Зависимость результатов измерения от передкового номера измерения (от времени): а - дрейф отсутствует, б - дрейф наблюдается.

Точки - эсприментальные значения, прямые - аппроксимация точек (проведена от руки)обычно откладывают порядковый номер i результата отдельного измерения, на вертикальной оси - сам результат. На рис. 4, а дрейф отсутствует, на рис. 4, б результаты систематически увеличиваются с течением времени (с увеличением порядкового номера i)

При наличии дрейфа следует установить, связан ли он с неисправностью прибора (устранить ее или заменить прибор) или с закономерным изменением определяемой величины (здесь необходимо специальное исследование). При отсутствии дрейфа нужно построить экспериментальную гистограмму, показывающую, как часто получаются те или иные значения x_i . Пример построения такой гистограммы приведен в п. 7, здесь же укажем несколько рекомендаций. Если Δn- число измерений, попадающих в любой из одинаковых интервалов (ячейка гистограммы), на которые разбивается весь диапазон значений определяемой величины, то величина $\Delta n/n$ будет оценкой вероятности того, что величина x находится в пределах ячейки. Кривая, наилучшим образом описывающая экспериментальное распределение вероятности, называется законом распределения. В случае нормального распределения в качестве точечной оценки σ берут выборочное среднее квадратическое отклонение $S(x)$ отдельного измерения (формула (3)) . Относительная погрешность такой оценки зависит от числа измерений и при небольшом n она велика. Практически достаточным является сделать 40...50 измерений (при 50 измерениях относительная погрешность примерно равна 22%). Оценку величины σ можно провести, не прибегая к формуле (3), а используя кривую закона распределения, а именно она равна полуширине кривой на уровне 0,6 долей максимального ее значения.

5. СХЕМА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение

Различают измерения прямые (непосредственные) и косвенные. При прямом измерении значения определяемой величины находятся непосредственно из опыта путем отсчета по шкале измерительного прибора. Если приборная погрешность $Dx_{приб}$ является определяющей, то достаточно выполнить одно измерение. Если погрешность разброса (случайная) $Dx_{случ}$ является определяющей, то измерения нужно проводить многократно, чтобы $Dx_{случ}$ стала меньше $Dx_{приб}$ (достаточно в 3 раза). Возможна погрешность отсчета $Dx_{отсч}$, связанная с тем, что указатель прибора находится между делениями шкалы. В этом случае абсолютная результирующая погрешность равна

$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{приб.}\right)^2 + \left(\Delta x_{случ.}\right)^2 + \left(\Delta x_{отсч.}\right)^2}$ Если результат отсчета округляется до целых делений, то $Dx_{отсч}$ = 0,5 цены деления; если до половины деления, то $Dx_{отсч}$ =0,3 цены деления. Если можно отсчитать десятые доли деления, то погрешностью $Dx_{отсч}$ пренебрегают и

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{приб.}\right)^2 + \left(\Delta x_{случ.}\right)^2}$$

При косвенном измерении величины результат находится с использованием известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Приближенное число, являющееся результатом измерения, имеет определенное количество цифр, которое получается путем округления и определяется его абсолютной погрешностью. Это число состоит из верных цифр и одной последней сомнительной цифры (или двух сомнительных). Последняя верная цифра находится в разряде, единица которого больше абсолютной погрешности. Например, число 2,04 ± 0,06 имеет верные цифры 2 и 0, так как 0,1 > 0,06. и сомнительную цифру 4; число 0,00453 ± 0,00013 имеет верную цифру 4, так как 0,001 > 0,00013, и две сомнительные 5 и 3; нули, стоящие слева, в число верных цифр не входят. Отброшенные в результате округления цифры называются неверными. При округлении, если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из оставляемых цифр не изменяется; если же она больше 5 или равна 5, то к последней из оставляемых цифр прибавляется единица.

Приближенное число имеет значащие и незначащие цифры. Значащими являются все верные цифры и одна сомнительная цифра (или две), кроме нулей слева. Нули, стоящие справа, могут быть значащими и незначащими. Если нули получились в результате округления больших чисел, то они незначащие; если последние разряды пустые, но верные (с одним сомнительным), то они значащие.

Наиболее удобная форма представления приближенных чисел -нормальная форма: первая значащая цифра стоит в разряде единиц, остальные - в десятичных разрядах после запятой и добавляется множитель вида 10 , где к - целое число. Например, число 0,000453 в нормальной форме имеет вид $4{,}53*10^{-4}$; число 1345 имеет вид $1{,}345*10^{3}$; число 7200 имеет вид $7{,}200*10^{3}$, если нули значащие, и $7{,}2*10^{3}$, если нули незначащие.

Количестве) верных цифр в числе является показателем его точности и определяется его относительной погрешностью $\boldsymbol{K_x}$ **.** Если $\boldsymbol{K_x}$ лежит в пределах 1О...О,1%, то число содержит две верные цифры; если в пределах 1...О,О1%, то результат содержит три верные цифры и т.д. В условиях учебной лаборатории чаще получают результаты с двумя верными цифрами. В относительной погрешности $\boldsymbol{K_x}$ указывают две цифры, не считая нулей слева. Абсолютная погрешность округляется до первой слева цифры (отличной от нуля) или двух цифр, если первая I, 2 или 3. При этом округление всегда идет в сторону увеличения, т.е. последняя из оставляемых цифр увеличивается на 1, если первая из отбрасываемых цифр не нуль. Затем округляется само приближенное число, так что к верным цифрам добавляется одна или две сомнительные цифры в зависимости от того, до одной или двух цифр округляется абсолютная погрешность. Следует помнить, что в окончательном представлении результата (после округления) и само число и его абсолютная погрешность должны заканчиваться одним и тем же разрядом: например; $(4{,}53\pm 0{,}13)*10^{-4}$ Дж; $(7{,}200\pm0{,}500)*IO^{-3}$ К (нули справа - значащие); $(7{,}2\pm0{,}5)*IO^{3}$ К (нули справа - незначащие) и т.д.

Любое округление числа представляет систематическую погрешность, поэтому оно производится в конце вычислений. Как правило, результаты прямых измерений содержат небольшое количество цифр, при промежуточных вычислениях **их** количество возрастает и конечный ответ получается с большим набором цифр (особенно, если пользоваться микрокалькулятором). Количество значащих цифр, которое следует брать в приближенных промежуточных результатах, должно быть разумно обоснованным: оно не должно быть большим, так как числа будут содержать много неверных цифр, и не должно быть небольшим, так как такое грубое округление внесет большую систематическую погрешность в процесс вычислений» Как установить разумное количество значащих цифр? Относительная погрешность косвенного измерения обычно больше относительной погрешности наименее точного прямого измерения, имеющего наибольшую относительную погрешность. Это означает, что количество верных цифр в косвенном измерении не больше, чём в наименее точном прямом измерении. Чтобы можно было пренебречь систематической погрешностью округления результатов промежуточных вычислений, нужно, чтобы относительная погрешность этого округления была на порядок (в 10 раз) меньше относительной погрешности косвенного измерения. Этого можно достичь, если все промежуточные и предварительные конечные результаты приводить с числом значащих цифр превышающих на единицу числу значащих цифр в наименее точном прямом измерении. При относительной погрешности измерений 10…1% расчеты можно проводить, пользуясь тремя значащими цифрами, при 1...О,1% - четырьмя значащими цифрами и т.д. При окончательной записи результата измерений $x_0 = \bar{x} \pm \Delta x$ следует провести округление полученных данных, как указано выше.

5.1. Прямые измерения (многократные и однократные)

1.1. Выполнить измерения определяемой величины x и получить выборку объемом n - совокупность значений x_i, где $i = 1,2,3,...,n$.
1.2. Определить выборочное среднее $\bar{x}$ по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.3. Определить абсолютные погрешности Δx_i отдельных измерений x_i ;

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$$

при этом выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

1.4. Рассчитать выборочное среднее квадратическое отклонение $S(x)$ для единичного измерения x_i

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$$

1.5. Определить выборочное среднее квадратическое отклонение $S(\bar{x})$ для выборочного среднего $\bar{x}$:

$$S(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}}$$

1.6. Выбрать доверительную вероятность P (обычно она берется на уровне P = 0,9).

1.7. По заданным значениям p=0.9 и n найти из табл.1 значения $t_{0,9;\ n}$ - квантиля распределения Стьюдента .

Таблица 1.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	∞

$t_{0,9;\,n}$	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,90	1,86	1,83	1,73	1,64

1.8. Вычислить абсолютную погрешность измерений $\Delta \boldsymbol{x}$.

1.9.1.Если статистическая (случайная) погрешность $\Delta x_{случ} = S(\bar{x}) t_{pin}$ сравнима с систематической δ (в большинстве случаев сводящейся к приборной), то

$$\Delta \boldsymbol{x} = \sqrt{\left[\mathrm{S}(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot \mathrm{t_{pin}}\right]^2 + (\mathrm{K_p} \cdot \frac{d}{3})^2}$$

где $K_p = t_{pin=\infty}$ При p = 0,9 из табл. 1 следует, что $K_{0,9} = t_{0,9;\infty}$ = 1,64 .

Если класс точности прибора обозначается одним числом I , то

$$\delta = \frac{\mathrm{I} \cdot \mathrm{D}}{100}$$

где D - конечное значение диапазона измерений для выбранной шкалы прибора .

Если класс точности прибора обозначен в виде двух чисел , разделенных косой чертой, т.е. C/d , то

$$\delta = \mathrm{X} \cdot \frac{\mathrm{c} + \mathrm{d} \cdot (|D/x| - 1)}{100}$$

Здесь в качестве $\boldsymbol{x}$ следует взять либо $\bar{\boldsymbol{x}}$ при многократных измерениях, либо $\boldsymbol{x}_{однокр}$ при разовом измерении .

Если класс точности прибора неизвестен, то δ берется равной половине цены деления шкалы прибора на выбранном пределе измерений .

1.8.2. Если систематическая погрешность δ значительно (в 3 и более раз) меньше статистической $\Delta \boldsymbol{x}_{случ} = S(\bar{x})\, t_{pin}$, то $D\boldsymbol{x} = S(\bar{x}) t_{pin}$ **.**

1.8.3. Если статистическая погрешность $\Delta \boldsymbol{x}_{случ} = S(\bar{x})\, t_{pin}$ много меньше **(**в 3 **и** более раз) систематической δ , то $\Delta \boldsymbol{x} = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \mathrm{K_p}$

1.9. Определить относительную погрешность результата измерений по абсолютной погрешности $\Delta \boldsymbol{x}$**,** найденной в пп. 1.8.1, 1.8.2, 1.8.3 по формуле

$$\mathrm{K_x} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\bar{\boldsymbol{x}}}$$

записать результат многократного измерения в виде

$$\boldsymbol{x_0} = \bar{\boldsymbol{x}} \pm \Delta \boldsymbol{x}$$

проведя соответствующее округление результата (см. п.5).

$$\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x}_{однокр} \pm \delta$$

1.10. Если выполнено однократное измерение $\boldsymbol{x}_{однокр}$, то в качестве абсолютной погрешности $D\boldsymbol{x}$ следует взять приборную ошибку d (см. п. 1.8.1) и результат измерения записать в виде

Относительная погрешность измерения будет

$$\mathrm{K}_x = \frac{d}{\boldsymbol{x}_{однокр}}$$

5.2. Косвенные измерения

Определяемая величина Y находится из формулы, являясь функцией измеряемых величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, т.е. $y=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)$

В качестве оценок величин $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m$ берутся их выборочные средние по m выборкам, каждая из которых объемом n, т.е.

$$\left.\begin{matrix} x_{11}, x_{12}, x_{13},\ldots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, x_{32},\ldots, x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k1}, x_{k2}, x_{k3},\ldots, x_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}, x_{m2}, x_{m3},\ldots, x_{mn} \end{matrix}\right\} m \quad \text{выборок}$$

т.е. $m*n$ - измерений.

2.1. Выполнить n серий измерений, в каждой из которых снять показания $x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \ldots, x_{mk}$ где $K=1,2,3,\ldots,n$.

2.2. Для каждой из измеряемых величин $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_m$ вычислить следующие выборочные характеристики.

2.2.1. Выборочное среднее x_i $\quad \overline{x_i} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_{ik}$

где i = I, **2,** 3, ...m .

2.2.2. Выборочное среднее квадратическое отклонение для единичного измерения x_i

$$S(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x_i})^2}$$

2.2.3. Выборочное среднее квадратическое отклонение для выборочного среднего $\overline{x_i}$

$$S(\overline{x_i}) = \frac{S(x_i)}{\sqrt{n}}$$

2.2.4. Абсолютную погрешность измерения Δx_i, следуя пп. 1.6, 1,7,1.8.1,1.8.2, 1.8.3 (см.п. 5.1).

2.3.Подставить вместо $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m$ их выборочные средние $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ldots, \overline{x}_m)$ вычислить величину

$$\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ldots, \overline{x}_m)$$

2.4. Взять производные $\frac{\partial y}{\partial x_1};\frac{\partial y}{\partial x_2};\ldots;\frac{\partial y}{\partial x_m}$ и ,

подставляя в них вместо $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m$ их выборочные средние $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ldots, \overline{x}_m)$

подсчитать величины $\frac{\partial y}{\partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ldots, \overline{x}_m),\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_m}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ldots, \overline{x}_m)$

2.5. Определить абсолютную погрешность результата косвенных измерений

$$\Delta Y = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ldots, \overline{x}_m)\right]^2\cdot(\Delta x_1)^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ldots, \overline{x}_m)\right]^2\cdot(\Delta x_2)^2 + \ldots}$$

$$+\left[\frac{\partial y}{\partial x_m}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\ldots,\overline{x_m}\right)\right]^2\cdot(\Delta x_m)^2$$

где значения Δx_i и $\frac{\partial y}{\partial x_i}\left(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_m\right)$ вычислить согласно пп. 2.2.4 и 2.4.

2.6. Определить относительную погрешность косвенных измерений

$$K_y=\frac{\Delta y}{\overline{y}}$$

2.7. Если зависимость имеет вид, удобный для логарифмирования, то сначала следует определить относительную погрешность, положив $z = \ln y$:

$$K_y=\sqrt{\left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\left(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_m\right)^2\right]^2\cdot(\Delta x_1)^2+\ldots+\left[\frac{\partial z}{\partial x_m}\left(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_m\right)^2\right]^2\cdot(\Delta x_m)^2}$$

В этом случае п. 2.5 не выполняется, а абсолютная погрешность результата косвенных измерений находится по формуле

$$\Delta y=\overline{y}\cdot K_y$$

2.8. Если косвенные намерения проводятся в невоспроизводимых условиях, то значение функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ следует вычислить для каждой отдельной серии измерений и получить набор значений y_1 , y_2 ,…, y_n . В этом случае результат косвенных измерений получается обработкой вычисленных n значений функции y по формулам прямых измерений пп. 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.8.2, 1.9, заменив в них x ,

x_1 , x_2 ,…, x_n соответственно на y_1 , y_2 ,…, y_n.

2.9. Если для каких-либо из определяемых величин x_1 , x_2 ,…, x_m выполнено по одному измерению, то в формулах пп. 2.3, 2.4, 2.5, 2.7. вместо соответствующих выборочных средних нужно взять результат однократного измерения. В этом случае в формулах пп. 2.5 и 2,7 значения Δx_i соответствующие однократному измерению, нужно определить по п. 1.10.

2.10. Записать результат косвенных измерений в виде:

$$y=\overline{y}\pm\Delta y$$

проведя соответствующее округление результата (см. п.5).

5.3 Примеры формул для расчета погрешностей результатов косвенных измерений .

Рассмотрим несколько примеров формул для расчета погрешности результатов косвенных измерений .

5.3.1. Погрешность результатов косвенных измерений для функции одного переменного δ .

Если искомая физическая величина $\boldsymbol{y}$ зависит от одного переменного $\boldsymbol{x}$, то функциональная связь между ними может быть представлена в общем виде соотношением : $\boldsymbol{y = f(x)}$ (1)

В соответствии с изложенным в п.5.2 данного описания величина абсолютной погрешности определяется дифференцированием этой функции по переменной

$\boldsymbol{x}$ и имеет вид : $|\Delta \boldsymbol{y}| = \dfrac{\boldsymbol{df}\,(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{dx}} \cdot \Delta \boldsymbol{x}$ (2)

Относительная погрешность функции одного переменного в общем виде имеет

вид : $|\mathrm{K}_y| = \dfrac{|\Delta \boldsymbol{y}|}{\bar{\boldsymbol{y}}} = \dfrac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}} \cdot \dfrac{\Delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{f(x)}}$ (3)

Примеры формул для вычисления погрешностей одного переменного ряда наиболее часто встречающихся на практике функций представлены в таблице 1.

№ п/п	Функция y	Погрешность	
		Абсолютная	Относительная
1	$\boldsymbol{a}$(постоянная)	0	———
2	a^x	$a\ Dx$	$\dfrac{\Delta x}{\bar{x}}$
3	x^n	$n\,\bar{x}^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\Delta x$	$n\dfrac{\Delta x}{\bar{x}}$
4	$x^{\frac{1}{n}}$	$\dfrac{1}{n}\,\bar{x}^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\Delta x$	$\dfrac{1}{n}\,\bar{x}^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\Delta x$
5	a^x	$a^{\bar{x}} \cdot \ln a \cdot \Delta x$	$\ln a \cdot \Delta x$
6	e^x	$e^{\bar{x}} \cdot \Delta x$	Δx
7	$\ln x$	$\dfrac{\Delta x}{\bar{x}}$	$\dfrac{\Delta x}{\bar{x} \cdot \ln \bar{x}}$
8	$\lg x$	$0.43 \cdot \dfrac{\Delta x}{\bar{x}}$	$043 \cdot \dfrac{\Delta x}{\bar{x} \cdot \ln \bar{x}}$
9	$\sin x$	$\cos \bar{x} \cdot \Delta x$	$\mathrm{ctg}\, \bar{x} \cdot \Delta x$
10	$\cos x$	$\sin \bar{x} \cdot \Delta x$	$\mathrm{tg}\, \bar{x} \cdot \Delta x$
11	$\mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{\Delta x}{\cos^2 \bar{x}}$	$\dfrac{2 \cdot \Delta x}{\sin 2\bar{x}}$
12	$\mathrm{ctg}\, x$	$\dfrac{\Delta x}{\sin^2 \bar{x}}$	$\dfrac{2 \cdot \Delta x}{\sin 2\bar{x}}$

Величины $\bar{\boldsymbol{x}}$ и $\Delta \boldsymbol{x}$, входящие в формулы погрешностей , определяются по результатам прямых измерений в соответствии с изложенным в п.5.1 данного описания .

5.3.2. Погрешность результата косвенных измерений для функции нескольких переменных .

Пусть искомая физическая величина (результат косвенных измерений) $\boldsymbol{y}$ теперь является функцией нескольких независимых переменных (результатов прямых измерений) x_1 , x_2 ,…, x_m ; она может быть представлена в виде : $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ (4)

В соответствии с изложенным в пункте 5.2 (данного описания) величина абсолютной погрешности y представляет собой полный дифференциал функции (4) и определяет её последовательным дифференцированием по каждой из m переменных (смотри 5.3.1 данного раздела) формула абсолютной погрешности функции y будет иметь вид : (5)

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2_{x_2, x_3,\ldots, x_m}(\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2_{x_1, x_3,\ldots, x_m}(\Delta x_2)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2_{x_1, x_2,\ldots, x_{m-1}}(\Delta x_m)^2}$$

Формула для определения относительной погрешности имеет вид :

$$\mathrm{K}y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2_{x_2, x_3,\ldots x_m}\left(\frac{\Delta x_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2_{x_1, x_3,\ldots, x_m}\left(\frac{\Delta x_2}{f}\right)^2 + \ldots}$$

$$\overline{\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2_{x_1, x_2,\ldots, x_{m-1}}\left(\frac{\Delta x_m}{f}\right)^2} \qquad (6)$$

Практика расчета абсолютных погрешностей результатов косвенных измерений свидетельствует о том , что математически проще сначала вычислять относительную погрешность по формуле (6) , предварительно прологарифмировав функции (1) и (6) , а затем , зная y , рассчитывать Δy из соотношения :

$$\Delta y = \mathrm{K}y \cdot \bar{y} \qquad (7)$$

Рассмотрим примеры расчета формул для вычисления абсолютной и относительной погрешностей результатов косвенных измерений , когда эти результаты представлены функцией нескольких переменных (4) .

Пример №1 . В работе № 134 (определение плотности вещества в различных фазовых состояниях) для расчета погрешности плотности $\Delta\rho$ используется

формула (функция) : $\rho = \dfrac{4m}{\pi \bar{D}^2 \bar{h}}$,где m - масса тела

цилиндрической формы , D – диаметр этого тела , а h – его высота . В соответствии с (4) $\rho = f(m , D , h)$. Применение соотношения (5) дает :

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{4\Delta\bar{m}}{\pi\bar{D}^2\cdot\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{8\bar{m}\Delta\bar{D}}{\pi\bar{D}^3\cdot\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{4\bar{m}\Delta\bar{h}}{\pi\bar{D}^2\cdot\bar{h}^2}\right)^2}$$

Использование соотношения (6) дает :

$$\mathrm{K}\rho = \frac{\Delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial m}\ln\rho\Delta\bar{m}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial D}\ln\rho\Delta\bar{D}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial h}\ln\rho\Delta\bar{h}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{m}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta\bar{D}}{\bar{D}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{h}}{\bar{h}}\right)^2}$$

Пример №2 . В работе №130 расчет ускорения свободного падения **g** методом математического маятника выполняется с помощью формулы :

$$\mathbf{g} = \frac{4\pi^2 N^2 \boldsymbol{h}}{t_2^2 - t_1^2}$$

, где $\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{l_1} - \boldsymbol{l_2}$ – разность длин нити для маятника 1 и 2 , $\boldsymbol{l_1}$ и $\boldsymbol{l_2}$ - длины нити маятников , t_2 и t_1 – интервалы времени в течение которых эти маятники совершают N колебаний . В соответствии с (4)

$\mathbf{g} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}, t_1, t_2)$.

Применение (5) дает :

$$\Delta\bar{\mathbf{g}} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 \bar{N}^2 \bar{\boldsymbol{h}}}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_1^2}\Delta\bar{\boldsymbol{h}}\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 \bar{N}^2 \bar{\boldsymbol{h}} \cdot \bar{t}_2}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_1^2}\Delta\bar{t}_2\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 N^2 \boldsymbol{h} \cdot \bar{t}_1}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_1^2}\Delta\bar{t}_1\right)^2}$$

Применение соотношения (6) приводит к :

$$\mathrm{K}\boldsymbol{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{\boldsymbol{h}}}{\bar{\boldsymbol{h}}}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{t}_2^2 \Delta\bar{t}_2^2}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_1^2}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{t}_1^2 \Delta\bar{t}_1^2}{\bar{t}_2^2 - \bar{t}_1^2}\right)^2}$$

Пример №3. В работе №108 показатель адиабаты $\gamma \equiv \frac{\boldsymbol{C_p}}{\boldsymbol{C_v}}$, определяемый методом адиабатического расширения , рассчитывали по формуле : $\gamma = \frac{\boldsymbol{h_1}}{\boldsymbol{h_1} - \boldsymbol{h_2}}$

где $\boldsymbol{h_1}$ и $\boldsymbol{h_2}$ показания манометра .

Вывод формул для расчета погрешностей K_γ и $\Delta\gamma$ выполняется по схеме :

а) логарифмируем расчетную формулу : $\boldsymbol{ln}\,\gamma = \boldsymbol{ln}\,\bar{\boldsymbol{h}}_1 - \boldsymbol{ln}(\bar{\boldsymbol{h}}_1 - \bar{\boldsymbol{h}}_2)$;

б) находим K_γ, используя соотношение (6) :

$$\mathrm{K}_g = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{\boldsymbol{h}}_1} - \frac{1 - \bar{\boldsymbol{h}}_2}{\bar{\boldsymbol{h}}_1 - \bar{\boldsymbol{h}}_2}\right)^2 \left(\Delta\bar{\boldsymbol{h}}_1\right)^2 + \left(\frac{\bar{\boldsymbol{h}}_1 - 1}{\bar{\boldsymbol{h}}_1 - \bar{\boldsymbol{h}}_2}\right)^2 \left(\Delta\bar{\boldsymbol{h}}_2\right)^2}$$

в) вычисляем $\Delta\bar{\gamma} = \bar{\gamma} \cdot \mathrm{K}_g$.

Пример №4. В работе №104 термический коэффициент давления газа определяется соотношением : $\alpha = \frac{P_2 - P_1}{P_1 t_2 - P_2 t_1}$, где $P \equiv \boldsymbol{H} + \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{H}$- атмосферное давление , определяемое по барометру в лаборатории , $\boldsymbol{h}$ – избыточное по отношению к атмосферному давление , определяемое по манометру установки ; t_1-начальная , а t_2 – конечная температура опыта . Аналогично тому , как выводили формулу относительной погрешности в примере №3 , логарифмируя формулу для α , а затем , применяя соотношение (6) получим :

$$\mathrm{K}\alpha = \sqrt{2\left(\frac{\Delta\bar{\boldsymbol{h}}}{\bar{\boldsymbol{h}}_1 - \bar{\boldsymbol{h}}_2}\right)^2 + \frac{\left(\bar{t}_2^2 + \bar{t}_1^2\right)\Delta\bar{\boldsymbol{h}}^2 + \bar{P}_2^2 \Delta\bar{t}_1^2}{\left(\bar{P}_1\bar{t}_2 - \bar{P}_2\bar{t}_1\right)^2} + \frac{\left(\bar{t}_2^2 + \bar{t}_1^2\right)\Delta\bar{\boldsymbol{h}}^2 + \bar{P}_1^2 \Delta\bar{t}_2^2}{\left(\bar{P}_1\bar{t}_2 - \bar{P}_2\bar{t}_1\right)^2}}$$

Считаем , что $\Delta\bar{h} = \Delta\bar{h}_1 = \Delta\bar{h}_2$ - систематическая (приборная) погрешность манометра .

Пример №5 . В работе №131 термический коэффициент линейного расширения твердых тел определяется соотношением : $\beta = \dfrac{\Delta l}{l(t_1 - t)}$, где $\Delta l = l_1 - l$ изменение длины образца при изменении температуры от t до t_1 . Обозначим $\Delta t \equiv t_1 - t$.Выполняя стандартные математические операции (см.примеры №1-3), получим $K\beta = \sqrt{\left[\dfrac{\Delta(\Delta\bar{l})}{\Delta\bar{l}}\right]^2 + \left[\dfrac{\Delta\bar{l}}{\bar{l}}\right]^2 + \left[\dfrac{\Delta(\Delta\bar{t})}{\Delta\bar{t}}\right]^2}$

Пример № 6. В работе №103 коэффициент поверхностного натяжения жидкости определяется соотношением : $\alpha = \dfrac{F}{2\pi(D_1 - D_2)}$, где F – сила отрыва кольца от поверхности жидкости , D_1 - наружный , а D_2 – внутренний диаметры кольца . Выполняя стандартные математические операции логарифмировования , дифференцирования и приведения подобных членов (см.примеры №1-3) , получим формулу относительной погрешности в виде :

$$K\alpha = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}}\right)^2 + \frac{(\Delta\bar{D}_1)^2 + (\Delta\bar{D}_2)^2}{(\bar{D}_1 - \bar{D}_2)^2}}$$

Пример №7.В работе №118 коэффициент трения покоя $\mu_0 = tg\,\beta_0$, где β_0 –угол трения . Коэффициент качения находят по формуле :

$$\mu_{кач} = tg\beta_0 \frac{\cos j_n - \cos j_0}{n(j_n + j_0)} r$$

, где j_0 и j_n – угловые амплитуды колебания маятника (шарика) в начальный момент и после n колебаний , а r – радиус шарика .

После выполнения стандартных математических операций (см.примеры №1-3) , получим формулы относительных погрешностей :

а) $K_{\mu n} = \dfrac{2\Delta\bar{\beta}_0}{\sin\bar{\beta}_0}$

б) $K_{\mu кач} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta\bar{j}_0}{\bar{j}_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta\bar{r}_0}{\bar{r}_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta\bar{\beta}_0}{\sin\bar{\beta}_0 \cdot \cos\bar{\beta}_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin\bar{j}_0 \Delta\bar{j}_0}{1 - \cos\bar{j}_0}\right)^2}$

Пример №8. В работе №108 коэффициент внутреннего трения (вязкости) определяется по метеоду Стокса и рассчитывается по формуле :

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{(s - \rho)t}{L(1 + 2{,}4\frac{r}{R})}$$

, где σ - плотность вещества шара , ρ - плотность

исследуемой жидкости , L –отрезок пути , который шарик радиуса $\boldsymbol{r}$ проходит за время t , R – радиус цилиндра , $\boldsymbol{g}$ –ускорение свободного падения .
После выполнения стандартных математических операций (см.примеры №1-3) получим формулу относительной погрешности :

$$K_\eta \equiv \frac{\Delta\bar{\eta}}{\bar{\eta}} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta\bar{r}_0}{\bar{r}_0}\right)^2 + \frac{(\Delta s)^2 + (\Delta\bar{\rho})^2}{(\bar{s}-\bar{\rho})^2} + \left(\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{L}}{\bar{L}}\right)^2}$$

Пример №9. В работе №208 определяем электро-движущую силу (Э.Д.С.) компенсационным методом и расчитываем искомую величину по формуле :

$\varepsilon_x = \varepsilon_э \frac{R_x}{R_э}$, где $\varepsilon_э$- эталонная Э.Д.С. , $R_э$ и R_x – сопротивления соответствующие компенсации $\varepsilon_э$ и ε_x .
После выполнения стандартных математических операций (см.примеры №1-3) получим формулу относительной погрешности :

$$K_{\varepsilon x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_э}{\bar{\varepsilon}_э}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{R}_x}{\bar{R}_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{R}_э}{\bar{R}_э}\right)^2}$$

Пример №10 . В работе №214 методом релаксационных электрических колебаний определяем либо емкость C_x либо сопротивление R_x и рассчитываем

искомые величины по формулам : (а) $R_x = \frac{T_x}{T_э} R_э$, где $R_э$ – эталонное

сопротивление , T_x и $T_э$ – периоды релаксационных колебаний , соответствующие искомому R_x и эталонному $R_э$.

(б) $C_x = C_э \frac{T_x}{T_э}$, где – $C_э$ электроемкость , T_x и $T_э$ – периоды релаксационных

колебаний , соответствующие искомой C_x и $C_э$.
После выполнения стандартных математических операций (см.примеры №1-3) получим формулы относительных погрешностей :

(а^I) $K_{Cx} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{C}_э}{\bar{C}_э}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{T}_x}{\bar{T}_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{T}_э}{\bar{T}_э}\right)^2}$ (б^I) $K_{Rx} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{R}_э}{\bar{R}_э}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{T}_x}{\bar{T}_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{T}_э}{\bar{T}_э}\right)^2}$

6. ГРУБЫЕ И СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ. КЛАСС ТОЧНОСТИ ПРИБОРА

Грубые погрешности (промахи, просчеты) часто носят субъективный характер (обусловлены наблюдателем). Они возникают, например, при неправильном отсчете измеряемого значения (неправильная оценка деления шкалы, применение ошибочного множителя у измерительного прибора с несколькими диапазонами измерения и т.д.). К ним принадлежат также погрешности от паралакса (рис.5,а) и неучитываемая погрешность от вариации (рис.5, б). Измеренное значение вследствие трения в опорах подвижной части измерительного прибора в зависимости от того, подходит ли стрелка к этому значению справа или слева, получается большим или меньшим. Разность значений называется вариацией.

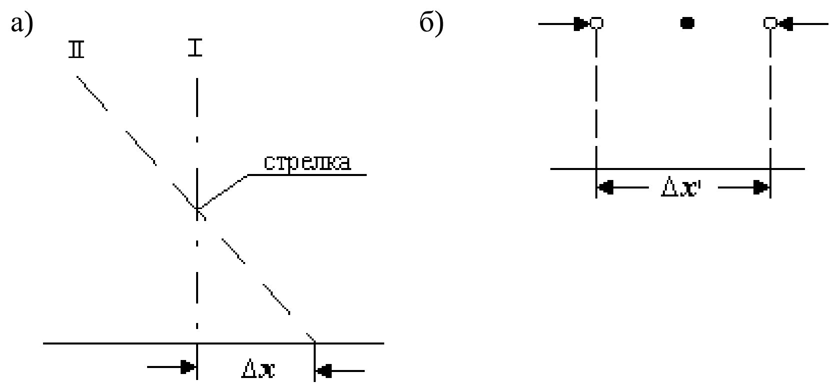


Рис.5. Погрешности от паралакса (а) и вариации (б):
I - правильное направление наблюдения; II - неправильное направление наблюдения; Δx - погрешность от паралакса; Положение стрелки при подходе слев положение стрелки при подходе справа;
I - истинное значение; Δx^1 - погрешность от вариации

К грубым погрешностям могут привести внезапные сильные влияния на измерительное устройство или экспериментальную установку, повреждения или помехи, которые нельзя считать субъективными.

Систематические погрешности при постоянных условиях измерений имеют постоянное значение. При закономерном изменении условий они либо остаются неизменными, либо закономерно изменяются.

К систематическим погрешностям относятся: погрешности измерительного прибора (наиболее часто встречающиеся и учитываемые в учебном физическом практикуме), погрешности метода измерения и измерительного устройства, погрешности от пренебрежения малыми величинами, погрешности от влияния внешних факторов. Систематические погрешности измерительного прибора (приборные погрешности) подразделяются на три подгруппы: аддитивные, пропорциональные (мультипликативные) и погрешности делений шкалы (нелинейные).

Чаще всего аддитивная погрешность возникает тогда, когда стрелка измерительного прибора в состоянии покоя не находится на нулевой отметке шкалы. Если установка стрелки прибора на нулевую отметку корректором невозможна, то погрешность может быть скорректирована последующим алгебраическим суммированием. Это оказывается наиболее эффективным, если шкала прибора линейна.

Пропорциональные (мультипликативные) погрешности в простейшем случае возникают из-за отклонений от номинальных значений добавочных сопротивлений, шунтов показывающих приборов и т.д. Если значение этого отклонения достаточно точно известно, то возникающие погрешности можно скорректировать с помощью поправочных коэффициентов.

Чтобы исключить погрешности делений шкалы (нелинейные), необходимо составить для каждого измерительного прибора таблицу поправок. Это достигается с помощью прибора, точность которого в 5 раз выше точности исследуемого измерительного прибора.

Абсолютная погрешность прибора Δx равна разности межцу показанием прибора x_i и истинным значением x_0 определяемой величины x : $\Delta x = x_i - x_0$.

Относительная погрешность прибора по определению равна

$$K_x = \left|\frac{x_i - x_0}{x_0}\right| \cdot 100\%$$

Истинное значение x_0 остается неизвестным, поэтому при оценке погрешностей вместо него пользуются понятием "действительное значение".

Приведенная погрешность γ - выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности Δx к нормирующему значению D

$$\gamma = \left|\frac{x_i - x_0}{D}\right| \cdot 100\%$$

Нормирующее значение D равно конечному значению диапазона измерений для приборов с нулевой отметкой на краю или вне шкалы или равно арифметической сумме конечных значений диапазона измерений в случае, когда нуль находится в середине шкалы.

У реальных приборов зависимость абсолютной погрешности от измеряемой величины x может быть представлена некоторой полосой неопределенности, обусловленной случайной погрешностью и изменением характеристик приборов в результате действия внешних факторов и вследствие старения (рис.6). Предельные значения абсолютных погрешностей $(\Delta x)_{max}$ могут быть как положительными, так и отрицательными, но одинаковыми по модулю.

Зависимость предельной абсолютной погрешности прибора от значения x_i определяемой величины x дается прямыми I:

$$\left|(\Delta x_i)_{max}\right| = |a| + |b \cdot x_i|$$

где a - предельное значение аддитивной погрешности;

bx_i - предельное значение пропорциональной (мультипликативной) погрешности.

Абсолютные аддитивные погрешности не зависят от x_i, тогда как пропорциональные (мультипликативные) - прямо пропорциональны x_i.

Согласно ГОСТ 8.401-82 приборам присваивается определенный класс точности.

Класс точности - это обобщенная характеристика прибора, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей. Класс точности, согласно стандартам, может быть обозначен числом или двумя числами в виде дроби.

У приборов, аддитивная погрешность которых много больше пропорциональной (мультипликативной) все значения погрешностей оказываются в пределах прямых 2, параллельных оси $\boldsymbol{x}$ (см. рис.6). У таких приборов класс точности обозначают одним числом, выбираемым в ряду чисел:

$1{\cdot}10^n$; $1.5{\cdot}10^n$; $2{\cdot}10^n$; $2.5{\cdot}10^n$; $4{\cdot}10^n$; $5{\cdot}10^n$; $6{\cdot}10^n$, где n=1 ; 0 ;-1 ;-2 и т.д.

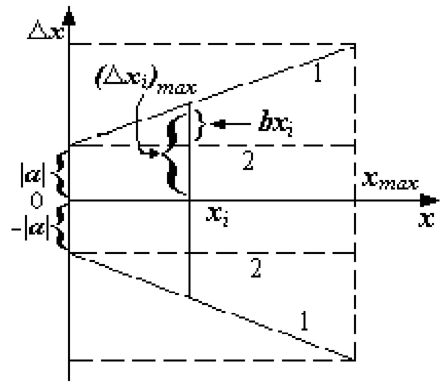


Рис.6. Зависимость предельной абсолютной погрешности прибора от измеряемой величины

У приборов, класс точности которых обозначается одним числом, основная приведенная погрешность в рабочем диапазоне шкалы, выраженная в процентах, не превышает значения**,** соответствующего классу точности. Это характерно для большинства стрелочных и самопишущих приборов.

Класс точности приборов, у которых аддитивная и пропорциональная (мультипликативная) составляющие основной погрешности соизмеримы, обозначаются в виде двух чисел, разделенных косой чертой, например класс точности 1,0/0,5. Предельное значение основной относительной погрешности приборов, выраженное в процентах, в этом случае может быть определено в результате расчета по формуле

$$\left|(\mathrm{K}_x)_{max}\right| = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \cdot \left(\left|D / \boldsymbol{x}_i\right| - 1\right) \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ - постоянные числа, определяемые по классу точности прибора ($\boldsymbol{c/d}$ - класс точности прибора). При этом $\boldsymbol{c}>\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{c/d}>1$.

К приборам, класс точности которых выражается дробно, относятся цифровые приборы, а также мосты и компенсаторы как с ручным, так и с автоматическим уравновешиванием.

Систематическая погрешность метода измерения и измерительного устройства обусловлена их влиянием на измеряемую величину. Различные установки и методы измерения характеризуются различными систематическими погрешностями метода измерения и измерительного устройства. Чтобы исключить или сделать минимальной эту погрешность, одну и ту же физическую величину исследуют различными методами и с помощью различных измерительных устройств.

Так, в лаборатории молекулярной физики вязкость жидкостей исследуют с помощью шариковых и капиллярных вискозиметров» поверхностное натяжение- методом отрыва кольца и максимального давления в пузырьке газа и т.д. В лаборатории электрофизики определяют термоЭДС методом амперметра и вольтметра, а также мостовым методом; сопротивление проводников и полупроводников исследуют мостовым и ампервольтметрическим методом; магнитные поля измеряют с помощью индукционных и холловских датчиков и т.д.

Погрешности от пренебрежения малыми величинами близки к систематическим погрешностям метода измерений или измерительного устройства. Существенная разница состоит в том, что они не могут быть определены во время или после измерения, так как нельзя учесть параметры факторов, являющихся причиной их возникновения.

Часто измеряя ток в системе и предполагая напряжение источника постоянным, судят об энергии тока, но напряжение не является неизменным с течением времени, а следовательно меняется энергия. При рассмотрении процессов при постоянной температуре в лаборатории и на практике не учитывают изменение температуры во времени, связанное с инерционностью термостатирующих устройств и температурных реле и т.д. Эти источники ошибок в инженерной практике возникают не только из-за упущения персонала, а зачастую связаны с требованиями экономики.

Погрешности от влияния внешних факторов обусловлены колебаниями климатических параметров (температура, атмосферное давление, влажность воздуха), вибрацией, внешними электрическими и магнитными полями, искажающими результаты измерений.

7.ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ГИСТОГРАММЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИИ ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ X И ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ σ И Xo ИЗ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\Delta n/n$

Пусть проведено 50 измерений напряжения, из которых x_{min} = 19,77 В, а x_{max} = 20,33 В. Эти значения укладываются в диапазоне напряжений

x_{max} - x_{min} =20,33 В - 19,77 В = 0,56 В.

Если принять, что в одну ячейку гистограммы попадает не менее 4 значений, то при общем числе измерений 50 весь диапазон для величины x можно разбить не более чем на 50/4 =12 одинаковых интервалов или ячеек гистограммы. Учтем, что измерения неравномерно распределены по всему диапазону. Это фактически уменьшает число ячеек примерно в 1,5-2 раза. Выберем 6 ячеек. Длина ячеек будет равна примерно 0,56/6 ≈ 0,093 В. Так как измеренные значения x содержат сотые доли, то длину ячейки нужно брать равной либо 0,09 либо 0,10 В. Выбрав значение 0,09 В, мы уменьшим общую длину всех ячеек и потеряем часть измерений при построении гистограммы (0,09 х 6 В = 0,54 В вместо 0,56 В). Поэтому следует несколько расширить диапазон значений x так, чтобы он включал в себя разность x_{max} - x_{min} . В данном конкретном случае целесообразно в качестве минимального взять значение 19,75 В, а в качестве максимального - 20,35 В, размер ячейки - 0,10 В. Обозначения ячеек, полученных при таком разбиении, приведены во второй колонке табл. 2.

Распределим полученные значения величины X по ячейкам и числа измерений, отнесенных к соответствующим интервалам, запишем в третью колонку табл.2. Поделив эти числа на общее число измерений 50, получим значения $\Delta n/n$. , которые запишем в четвертую колонку.

Гистограмму и график закона распределения $\frac{\Delta n}{n}$ следует нанести на миллиметровую, бумагу, как это показано на рис.7. По оси абсцисс (горизонтальная ось) принято откладывать измеряемую величину x , по оси ординат (вертикальная ось) - числа измерений и величину $\frac{\Delta n}{n}$. Масштаб может быть каким угодно, но надо при его выборе руководствоваться следующими соображениями. Он должен быть простым. Единице измеряемой величины (или 10; 100; 0,1 единицы и т.д.) лучше всего соотнести 1 см на миллиметровой бумаге. Можно выбрать также масштаб, чтобы 1 см соответствовал 2 или 5 единицам.

Пересечение координатных осей не обязательно должно совпадать с нулевыми значениями аргумента и функции. Необходимо полностью использовать всю площадь чертежа.

При построении кривой закона распределения $\frac{\Delta n}{n}$ через точки на ступеньках гистограммы (эти точки соответствуют середине интервалов Δx.) следует наилучшим образом провести колоколообразную кривую. Так как значения функции в указанных точках имеют погрешности, то необязательно все экспериментальные точки должны лежать на кривой.

Таблица 2

№ Ячейки гистограммы Δx ,В		Число измерений в ячейке , Δn	$\frac{\Delta n}{n}$
1	19,75-19,85	2	0,04
2	19,85-19,95	6	0,12
3	19,95-20,05	17	0,34
4	20,05-20,15	18	0,36
5	20,15-20,25	6	1,12
6	20,25-20,35	1	0,02

Из рис.7 видно , что на уровне 0,6 долей от максимальной ординаты кривой $\frac{\Delta n}{n}$ её ширина $2\sigma \approx 0{,}22$ В , откуда следует , что $\sigma \approx 0{,}11$, а $\overline{x}$, соответсвующее максимальному значению $\frac{\Delta n}{n}$, приближенно равно 20,06 В.

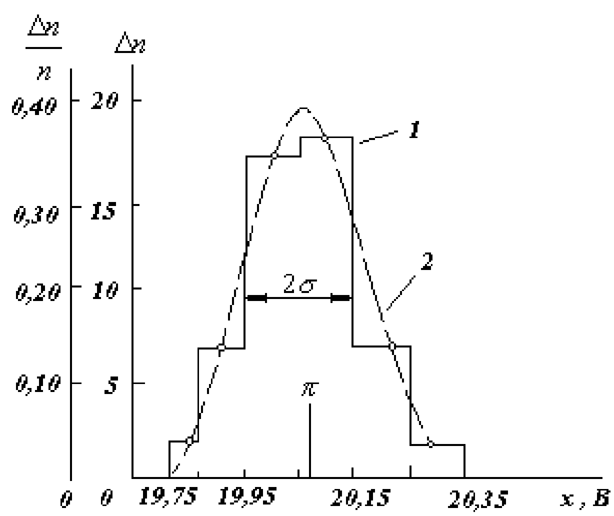


Рис.7.Гисограмма экспериментальных значений (1) и кривой (2) закона распределения $\frac{\Delta n}{n}$

8. ЗАДАЧИ РАБОТЫ. ЗАДАНИЯ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ

Перед выполнением конкретного задания необходимо ознакомиться с задачами работы.

1. В каждом из заданий с помощью двух измерительных приборов - грубого и более точного - провести многократные измерения одной и той же физической величины (40...50 измерений); в случае грубого прибора результаты измерений совпадают друг с другом.

2. Провести статистический анализ выборки, полученной точным прибором (изучить дрейф, определить среднее выборочное, доверительный интервал): для показаний обоих приборов указать абсолютную и относительную погрешности и правильно записать результаты измерений.

3. По показаниям более точного прибора построить экспериментальную гистограмму с помощью которой оценить величину среднего квадратического отклонения σ и истинное значение измеряемой величины; сравнить эти значения с оценками аналогичных величин, определенными в п.8(2).

4. Сравнить между собой величины систематических (приборных), а также случайных погрешностей, которыми характеризуются обе выборки, и оценить их вклад в погрешность окончательного результата.

ЗАДАНИЕ I. <u>Измерение электронный секундомером интервалов времени, задаваемых по механическому секундомеру с секундной стрелкой</u>

Интервалы времени задаются преподавателем. Показания электронного секундомера записываются в табл. 3 при условии одновременного запуска и остановки электронного и механического секундомеров. Измерения повторяются 40...50 раз. Далее см.пп.9 и 10.

ЗАДАНИЕ 2. <u>Измерение цифровым вольтметром напряжения. задаваемого по стрелочному прибору (рис.8)</u>

Вращением ручки потенциометра - регулятора напряжения на выходе выпрямителя - источника можно задавать по шкале стрелочного прибора напряжение (например, через 10 В) в диапазоне О...100 В. Задаваемое по указанию преподавателя напряжение многократно (40...50 раз) измеряется цифровым вольтметром и результаты записываются в табл.3. Далее см. пп.9 и 10.

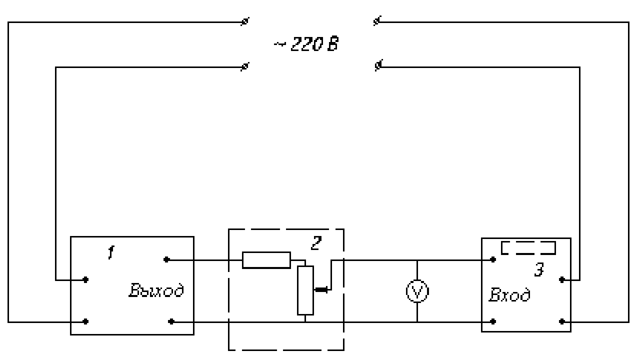


Рис.8. Блок-схема для измерения напряжения: I - источник постоянного напряжения; 2 – потенциометр; 3 - цифровой вольтметр; V - стрелочный вольтметр

ЗАДАНИЕ 3. Измерение частоты следования импульсов, заданных генератором стандартных импульсов

В качестве генератора стандартных сигналов используется блок контроля работы пересчетного устройства. Необходимо выполнить многократно (40...50 раз) измерение числа импульсов от блока контроля работы пересчетной установки за один из отрезков времени в I мин, 2 мин и т.д. с использованием стрелочного или электронного секундомера (по указанию преподавателя). Данные занести в табл.3. Определить число импульсов ***m*** в 1 с. Для этого вычислить среднее значение $\overline{m}$ по формуле

$$\overline{m} = \overline{N} / \bar{t}$$

где $\overline{N}$ и $\bar{t}$ - средние выборочные значения числа импульсов за время ***t,*** и соответсвенно интервалов времени счета.

Оценить абсолютную и относительную, т.е. Δm **и** Km **,** погрешности для косвенных измерений (см. п.5). Далее см. пп.9 и 10.

ЗАДАНИЕ 4. Измерение сопротивлений резисторов или емкостей конденсаторов с помощью мостов (РИС 9)

Измерить с помощью мостовой схемы величину сопротивления (или емкости) каждого из резисторов (иди конденсаторов), принадлежащих набору из 30...50 штук с одним и тем же номинальным значением (первая выборка). По указанию преподавателя провести многократные измерения (40..,60 раз) сопротивления (или емкости) любого одного резистора (или конденсатора). Это - вторая выборка.

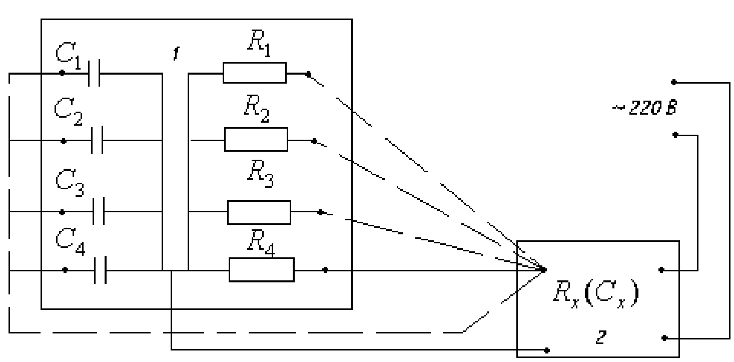


Рис.9. Блок-схема установки для намерения сопротивлений *R* резисторов и емкостей С конденсаторов:

I - плато с резисторами и конденсаторами; 2 - измерительный мост

Результаты занести, в табл.3 и идентичную ей вторую таблицу. Первая выборка характеризуется технологической, случайной и приборной погрешностями, вторая - случайной и приборной. Из соотношения погрешностей получить

$$\Delta технол = \sqrt{(\Delta^1{}_\Sigma)^2 - (\Delta^2{}_\Sigma)^2}$$

величину технологической погрешности:

где $\Delta^1{}_\Sigma$ и $\Delta^2{}_\Sigma$ - суммарные абсолютные погрешности, характеризующие выборки соответственно первую и вторую. Далее см. пп. 9 и 10.

9. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Прежде чем приступить в выполнению работы необходимо ознакомиться с содержанием задания (см. п. 8.), описаниями и правилами пользования приборами, указанными в работе. Инструкции находятся на рабочем месте или у лаборанта.

1. Подвести к приборам с помощью шлангов питания переменное напряжение (~ 220 В), включить тумблеры «Сеть» и дать приборам прогреться в течение 3...5 мин. Под контролем преподавателя или старшего лаборанта проверить исправность приборов и установить «О». После этого приступить к выполнению заданий I или 3. В задании 2 или 4 отключить приборы от сети, собрать электрическую схему и показать преподавателю.

2. С разрешения преподавателя включить приборы и приступить к измерениям.

3. Измерить определяемую величину несколько раз, чтобы освоить технику измерений и исключить грубые погрешности (просчеты), связанные с отсутствием опыта измерений (см.пп. 4 и 6). Результаты многократных измерений занести в таблицу.

4. По указанию преподавателя провести измерения, которые наиболее полно иллюстрируют систематическую погрешность (ее приборную составляющую). Провести сравнение этих погрешностей для различных шкал приборов (см.пп. 4 и 6). Записать результаты в таблицу, самостоятельно выбрав ее форму.

5.Выбрать шкалу, чувствительность которой будет достаточной для получения серии наблюдений с заметными случайными погрешностями. Произвести 30...50 измерений исследуемой величины для получения выборки, подлежащей статистической обработке. Результаты записать в табл.3.

6. Показать результаты преподавателю. Получив разрешение, переключить приборы на грубую шкалу и сдать установку лаборанту.

10. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕЙИЙ

При составлении отчета по работе необходимо;

I) проанализировать изменение со временем определяемой величины, построив по полученным результатам график аналогично изображенному на рис.4;

Таблица 3

N п/п	**Результаты отдельных наблюдений** x_i	**Случайные отклонения от выборочного среднего** $x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
	Единицы измерения	**Единицы измерения**	**Единицы измерения**
1 **2** **3** **…** **n**			
	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$

2) нанести результаты отдельных наблюдений x_i на ось x рациональным масштабом (п. 9 (3, 4, 5)) и определить x_{min} и x_{max} . Выяснить особенности поведения результатов, обусловленных различными по своей природе погрешностями (просчетами, систематическими (приборными) и случайными погрешностями);

3) по результатам измерений (п. 9 (5)) составить; таблицу по аналогии с табл. 2 (см. п.7), необходимую для построения гистограммы и кривой, описывающей закон распределения;

4) построить гистограмму, кривую закона распределения и оценить по кривой значение величины σ среднего квадратического отклонения (см.п.7);

5) используя данные табл.3, рассчитать по формулам (3) и (5) соответственно выборочное среднее квадратическое отклонение S(x) отдельного измерения и выборочное среднее квадратическое отклонение S($\bar{x}$) для выборочного среднего $\bar{x}$. Сравнить S(x) с значением σ , полученным из анализ гистограммы и кривой закона распределения;

6) сравнить между собой значения случайной и систематической погрешностей, оценить их вклад в погрешность измерения, записать окончательный результат (см. п.5).

Составили: профессор Ю.Р.ГИСМАТУЛЛИН и профессор
А.В.ПАНЮШКИН

Компьютерная вёрстка : Алексеев А.В. и Лазарев А.А.