ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»
(ФГБОУ ВПО ПГУПС)

Кафедра «Автоматика и телемеханика на железных дорогах»

АНАЛИЗ НЕИСПРАВНОСТЕЙ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА БУЛЕВОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Методические указания
к практическому занятию № 5
по дисциплине
«Основы технической диагностики»

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2016

Цель практического занятия – изучение метода булевого дифференцирования для анализа неисправностей комбинационных логических схем.

1 Основные теоретические положения

1.1 Булева производная

При анализе ошибок и константных неисправностей комбинационных логических схем применяется аппарат булевого дифференцирования [1–3].

Булевой производной (***булевой разностью***) функции $f\left(x_1,...,x_k,...,x_n\right)$ по переменной x_k называется функция

$$\frac{df\left(x_1,...,x_k,...,x_n\right)}{dx_k} = f\left(x_1,...,\overline{x_k},...,x_n\right) \oplus f\left(x_1,...,x_k,...,x_n\right). \qquad (1)$$

В дальнейшем для упрощения записи будем обозначать булеву производную функции $f\left(x_1,...,x_k,...,x_n\right)$ по переменной x_k как $\frac{df\left(x\right)}{dx_k}$.

Значение булевой производной позволяет определить, изменяется ли значение функции, вычисляемой комбинационной логической схемой, при инвертировании входной переменной x_k.

При вычислении булевой производной возможны следующие результаты:

1) если $\frac{df\left(x\right)}{dx_k} = g(x)$, то ошибка в x_k будет транслироваться на выход комбинационной схемы при $g(x) = 1$;

2) если $\frac{df\left(x\right)}{dx_k} = 0$, то ошибка в x_k не вызывает ошибку на выходе комбинационной схемы, и, следовательно, функция $f\left(x\right)$ не зависит от переменной x_k;

3) если $\frac{df\left(x\right)}{dx_k} = 1$, то ошибка в x_k всегда транслируется на выход схемы независимо от значений других переменных.

Известно [3], что булеву производную можно вычислить по формуле

$$\frac{df(x)}{dx_k} = f(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n) \oplus f(x_1,...x_{k-1},1,x_{k+1}...,x_n). \qquad (2)$$

Формула (2) позволяет существенно сократить объем вычислений при определении булевой производной.

При небольшом числе входных переменных (не более 6) булеву производную можно вычислять с использованием матричного представления функции алгебры логики, реализуемой комбинационной схемой (в виде карты Карно [4]). В этом случае изображаются две карты Карно, куда заносятся функции $f(x_1,...,x_k,...,x_n)$ и $f(x_1,...,\overline{x_k},...,x_n)$, а затем осуществляется совмещение карт Карно.

1.2 Аксиомы и законы алгебры логики

1.2.1 *Аксиомы и законы относительно функций основного базиса*

При вычислении булевых производных необходимо знать аксиомы и законы алгебры логики.

Перечислим аксиомы алгебры логики:

$$\overline{0}=1,\ \overline{1}=0;\ 0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1;\ 0\vee 0=0,\ 0\vee 1=1\vee 0=1\vee 1=1.$$

Законы алгебры логики сведены в табл. 1.

Таблица 1

Законы алгебры логики

Название закона	Математическое выражение
1	2
Закон нулевого множества	$0\cdot x=0$, $0\vee x=x$
Закон единичного множества	$1\cdot x=x$, $1\vee x=1$
Закон повторения	$x\cdot x=x$, $x\vee x=x$
Закон двойного отрицания	$\overline{\overline{x}}=x$
Закон логического нуля	$x\cdot\overline{x}=0$
Закон логической единицы	$x\vee\overline{x}=1$
Переместительный закон	$x_1x_2=x_2x_1$; $x_1\vee x_2=x_2\vee x_1$
Сочетательный закон	$x_1(x_2x_3)=(x_1x_2)x_3$; $x_1\vee(x_2\vee x_3)=(x_1\vee x_2)\vee x_3$

Окончание табл. 1

1	2
Распределительный закон	$x_1\left(x_2 \vee x_3\right) = x_1x_2 \vee x_1x_3$
Закон поглощения	$x_1 \vee x_1x_2 = x_1;$ $x_1\left(x_1 \vee x_2\right) = x_1$
Обобщенный закон поглощения	$x\left(x \vee \varphi\right) = x$ $x \vee \varphi x = x$ φ – любое логическое выражение
Закон упрощения (склеивания, объединения)	$x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2} = x_1;$ $\left(x_1 \vee x_2\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2}\right) = x_1$
Правила де Моргана	$\overline{x_1x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2};$ $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$
Обобщения формул двойственности (формулы Шеннона)	$x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}}.$ $\overline{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}.$ $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}}.$ $\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}.$

1.2.2 *Свойства операции сложения по модулю два*

При вычислении булевой производной необходимо использовать функцию сложения по модулю 2 (ее также называют функцией неравнозначности либо «исключающее ИЛИ»). Функция сложения по модулю 2 задается таблицей истинности (табл. 2).

Таблица 2

Функция сложения по модулю два

№	x_1	x_2	$f = x_1 \oplus x_2$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

Выписывая по табл. 2 дизъюнктивную совершенную нормальную форму (ДСНФ) записи функции, получаем:

$$f = x_1 \oplus x_2 = x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2. \qquad (3)$$

Аналогично запись конъюнктивной совершенной нормальной формы (КСНФ) для функции дает формулу

$$f = x_1 \oplus x_2 = \left(x_1 \vee x_2\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\right). \tag{4}$$

Функции (3) и (4) равны.

Запишем несколько выражений, полезных при вычислении функции сложения по модулю 2:

$$x \oplus 0 = x,$$

$$x \oplus 1 = \overline{x},$$

$$x \oplus x = 0,$$

$$x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 = x_1\left(x_2 \oplus x_3\right).$$

1.3 Анализ комбинационных схем относительно неисправностей входов

Пусть требуется определить входные наборы, на которых обнаруживаются неисправности входа x_2 комбинационной схемы (рис. 1) методом булевого дифференцирования.

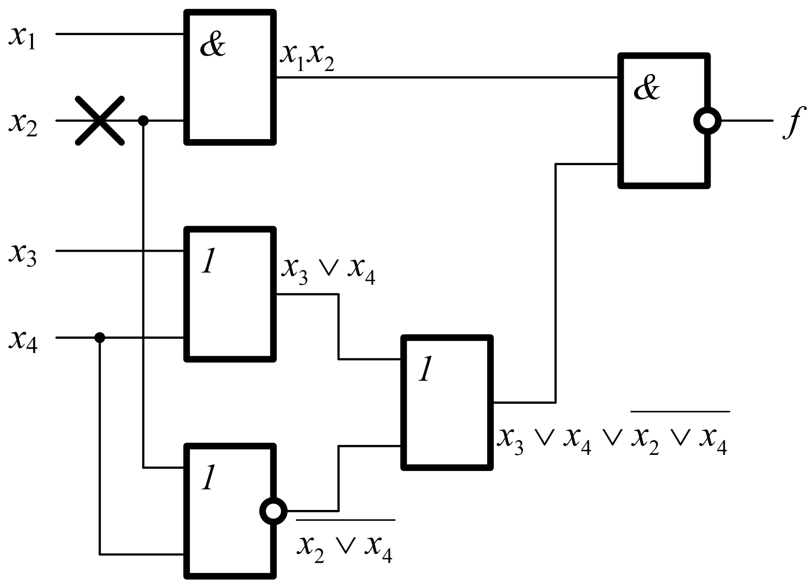


Рис. 1 Комбинационная схема

Определим, какую функцию реализует изображенная на рис. 1 схема, для чего выпишем функции, вычисляемые каждым логическим элементом:

$$f = \overline{x_1 x_2\left(x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_2 \vee x_4}\right)}.$$

Вычислим булеву производную по переменной x_2 первым способом по формуле (1):

$$\frac{df(x)}{dx_2}=\overline{x_1x_2\left(x_3\vee x_4\vee\overline{x_2\vee x_4}\right)}\oplus\overline{x_1\overline{x_2}\left(x_3\vee x_4\vee\overline{\overline{x_2}\vee x_4}\right)}=a\oplus b=a\overline{b}\vee\overline{a}b,$$

$$a=\overline{x_1x_2\left(x_3\vee x_4\vee\overline{x_2\vee x_4}\right)}=\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3x_4\vee\overline{\overline{x_2\vee x_4}}}=$$

$$=\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\,\overline{x_4}\left(x_2\vee x_4\right)=\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4},$$

$$\overline{a}=\overline{\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}}=x_1x_2\cdot\overline{x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}}=x_1x_2\left(\overline{x_2}\vee x_3\vee x_4\right)=x_1x_2x_3\vee x_1x_2x_4.$$

Функции b и $\overline{b}$ получаем инвертированием переменной x_2 соответственно в функциях a и $\overline{a}$:

$$b=\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4},$$

$$\overline{b}=x_1\overline{x_2}x_3\vee x_1\overline{x_2}x_4.$$

$$\frac{df(x)}{dx_2}=a\overline{b}\vee\overline{a}b=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}\right)\left(x_1\overline{x_2}x_3\vee x_1\overline{x_2}x_4\right)\vee$$

$$\vee\left(x_1x_2x_3\vee x_1x_2x_4\right)\left(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\right)=$$

$$=x_1\overline{x_2}x_3\vee x_1x_2x_3\vee x_1\overline{x_2}x_4\vee x_1x_2x_4=$$

$$=x_1x_3\left(\overline{x_2}\vee x_2\right)\vee x_1x_4\left(\overline{x_2}\vee x_2\right)=x_1x_3\vee x_1x_4.$$

Для контроля правильности вычислений – производная не зависит от переменной x_k, по которой производится дифференцировние.

Вычислим булеву производную по переменной x_2 вторым способом по формуле (2):

$$\frac{df(x)}{dx_2}=\overline{x_1\cdot 1\cdot\left(x_3\vee x_4\vee\overline{1\vee x_4}\right)}\oplus\overline{x_1\cdot 0\cdot\left(x_3\vee x_4\vee\overline{0\vee x_4}\right)}=$$

$$=\overline{x_1\left(x_3\vee x_4\vee 0\right)}\oplus\overline{0}=\overline{x_1\left(x_3\vee x_4\right)}\oplus 1=\overline{\overline{x_1\left(x_3\vee x_4\right)}}=x_1\left(x_3\vee x_4\right)=$$

$$=x_1x_3\vee x_1x_4.$$

Вычислим булеву производную по переменной x_2 третьим способом (с использованием карт Карно – рис. 2, *а*). Для этого в первую карту Карно поместим функцию $f(x)=a$, а во вторую – функцию $f(x)=b$. Результат сложения по модулю 2 карт Карно приведен на рис. 2, *б*.

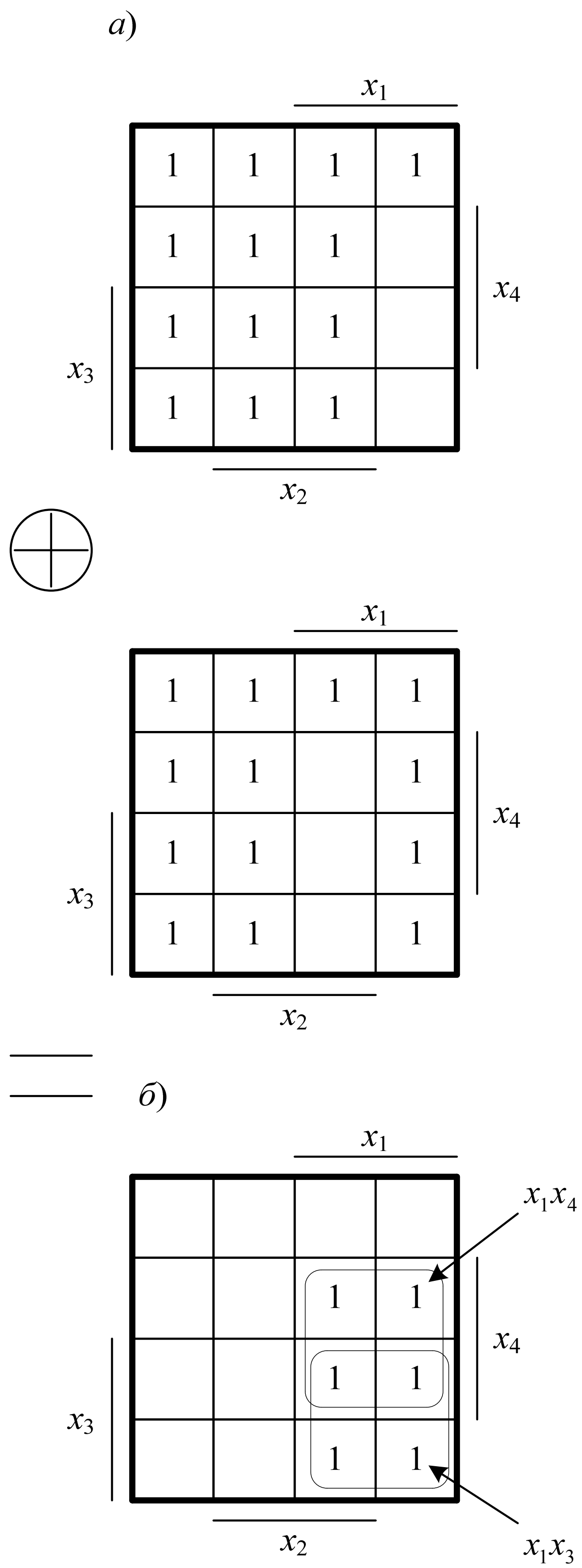


Рис. 2 Вычисление булевой производной по картам Карно:
а) исходные карты Карно; *б*) результат

В результате вычисления булевой производной было получено следующее выражение:

$$\frac{df(x)}{dx_2} = x_1x_3 \vee x_1x_4 = g(x).$$

Приравняв $g(x)$ к 1, получим те наборы, при подаче которых на входы комбинационной схемы произойдет трансляция ошибки со входа x_2 на выход схемы.

Функция $g(x)=1$, если равны 1 конъюнкции в ДНФ булевой производной $x_1x_3 = 1$ или $x_1x_4 = 1$. Другими словами, для трансляции ошибки со входа x_2 необходимо установить 1 на входах x_1 и x_3 или на входах x_1 и x_4. Все входные наборы перечислены в табл. 3.

Таблица 3

Входные наборы для трансляции ошибки входа x_2 на выход схемы

x_1x_3	x_1x_4
$x_1 \sim x_3 \sim$	$x_1 \sim\sim x_4$
$1 \sim 1 \sim$	$1 \sim\sim 1$
1010	1001
1011	1011
1110	1101
1111	1111

Таким образом, для определения ошибки на входе x_2 необходимо подать один из наборов <1001>, <1010>, <1011>, <1101>, <1110> или <1111>.

На рис. 3 приводится пример трансляции ошибки $0 \rightarrow 1$ со входа x_2 на выход схемы при подаче на входы набора <1010>. В этом случае на нижнем входе выходного элемента схемы Э$_2$ (элемента И-НЕ) устанавливается сигнал логической 1, и значение сигнала на выходе схемы становится зависимым только от значения верхнего входа элемента Э$_2$. Благодаря установке на верхнем входе элемента Э$_1$ (элемента И) единичного значения, ошибка входа x_2 будет транслироваться на выход элемента Э$_1$ и, как следствие, на выход элемента Э$_2$.

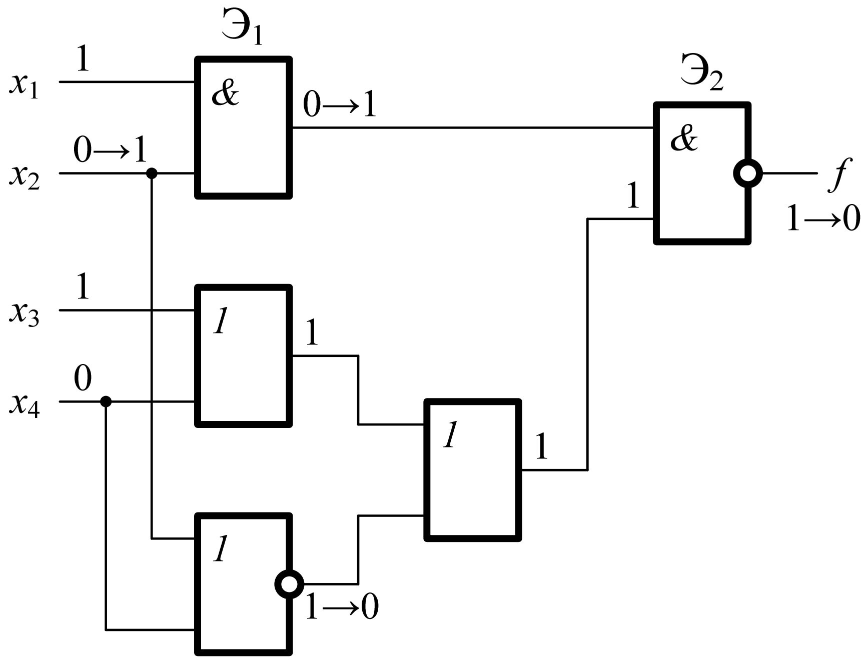


Рис. 3 Пример трансляции ошибки со входа x_2
при подаче на входы набора <1010>

1.4 Тестирование неисправностей на линиях схемы

Рассмотрим использование булевых производных при определении тестовых комбинаций для неисправностей внутренних линий комбинационных схем.

Чтобы обнаружить неисправность на заданной линии g, необходимо выполнение двух условий:

1. Неисправность должна проявиться на данной линии. Другими словами, на данной линии необходимо сформировать сигнал, противоположный виду неисправности.
2. Ложное изменение сигнала на рассматриваемой линии должно проявиться в искажении выхода схемы (неисправность должна транслироваться на выход).

Из п. 1 следует, что тестовый набор для неисправности 0→1 принадлежит множеству наборов, на которых на линии g реализуется функция $\overline{f_g}$, а для неисправности 1→0 – соответственно функция g. Из п. 2 следует, что тестовый набор принадлежит множеству наборов, на которых $\frac{df(x)}{dg} = 1$.

Таким образом, для того чтобы определить тестовые наборы для неисправностей типа «константа 0» и «константа 1», необходимо воспользоваться следующими формулами:

$$\varphi\left(g^{0}\right)=g\frac{df\left(x\right)}{dg},\tag{5}$$

$$\varphi\left(g^{1}\right)=\bar{g}\frac{df\left(x\right)}{dg}.\tag{6}$$

Рассмотрим неисправность на одной из линий схемы, приведенной на рис. 1. Положим, что существует неисправность типа «константа 1» на выходе элемента ИЛИ-НЕ первого уровня схемы (рис. 4).

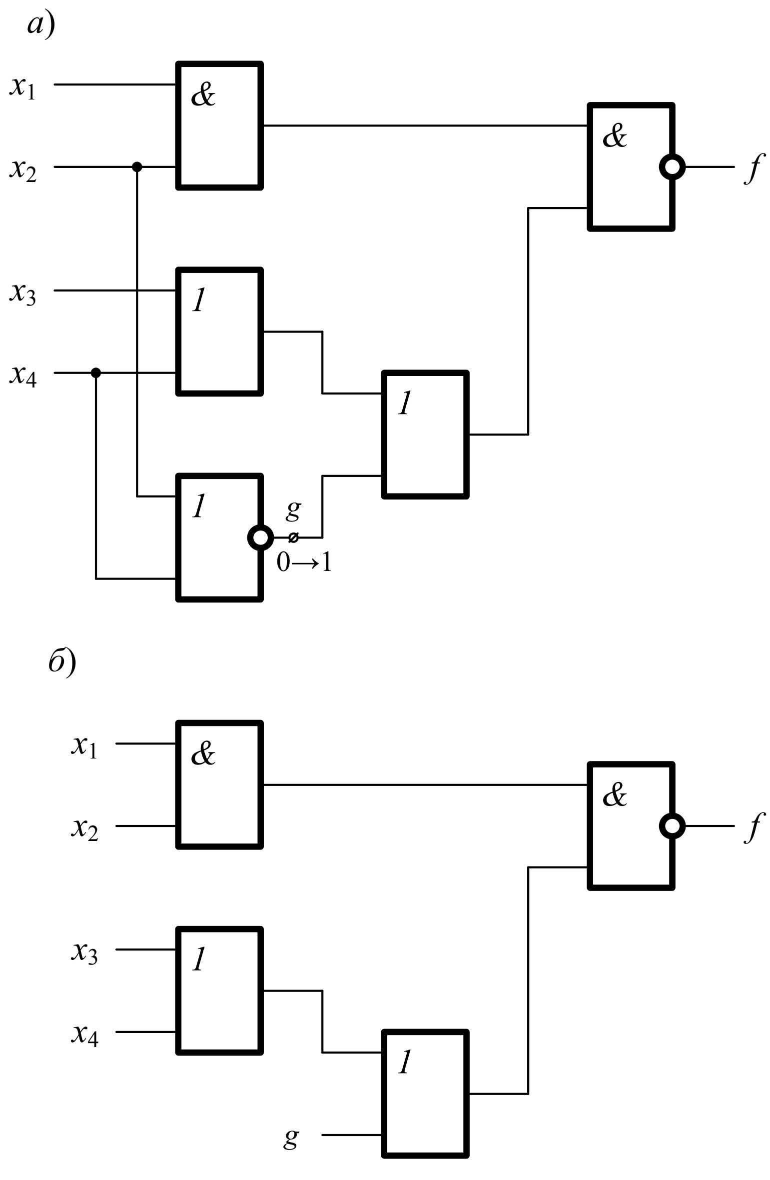


Рис. 4 Неисправность внутренней линии g

Для определения тестовых наборов воспользуемся формулой (6). При этом необходимо вычислить функцию, реализуемую на линии схемы:

$$g = \overline{x_2 \vee x_4}.$$

Определим булеву производную $\dfrac{df(x)}{dg}$, для чего представим функцию, реализуемую схемой в виде:

$$f = \overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_2 \vee x_4} \right)} = \overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \vee g \right)}.$$

Пользуясь полученным выражением для f, получаем:

$$\frac{df(x)}{dg} = \overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \vee 1 \right)} \oplus \overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \vee 0 \right)} = \overline{x_1 x_2 \cdot 1} \oplus \overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \right)} =$$

$$= \left(\overline{\overline{x_1 x_2}} \cdot \overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \right)} \right) \vee \left(\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{\overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \right)}} \right) =$$

$$= \left(x_1 x_2 \cdot \overline{x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \right)} \right) \vee \left(\overline{x_1 x_2} \cdot x_1 x_2 \left(x_3 \vee x_4 \right) \right) =$$

$$= x_1 x_2 \left(\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_3 \vee x_4} \right) = x_1 x_2 \left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \, \overline{x}_4 \right) =$$

$$= x_1 x_2 \overline{x}_1 \vee x_1 x_2 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \, \overline{x}_4 = x_1 x_2 \overline{x}_3 \, \overline{x}_4 .$$

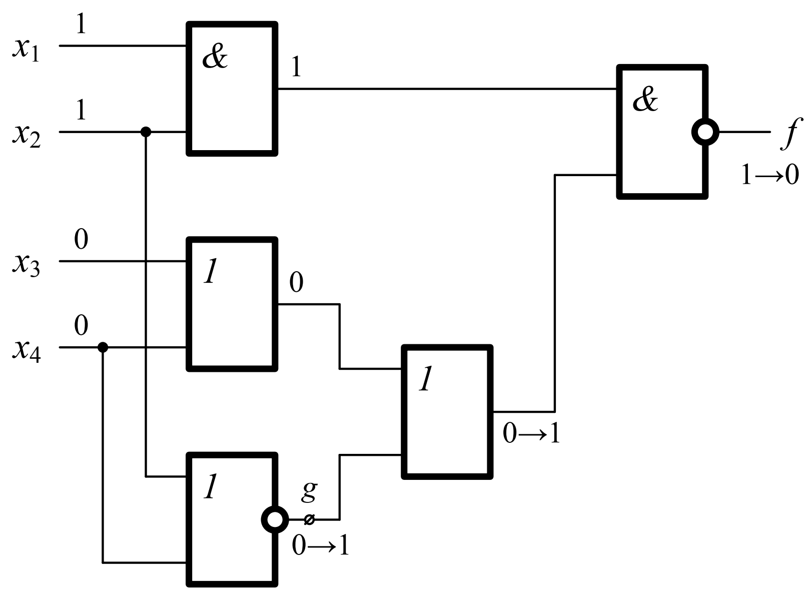


Рис. 5 Трансляция неисправности на линии g на вход схемы при подаче тестового набора

Подставим выражения $g = \overline{x_2 \vee x_4}$ и $\dfrac{df(x)}{dg} = x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4}$ в формулу (6):

$$\varphi\left(g^1\right) = \overline{g}\frac{df(x)}{dg} = \left(x_2 \vee x_4\right) x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} = x_2 x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_4 x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} = x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4}.$$

Полученное выражение для $\varphi\left(g^1\right)$ соответствует набору <1100>. На рис. 5 показано прохождение сигналов по линиям схемы при подаче данного набора на входы. Из рис. 5 видно, что неисправность линии g транслируется на выход комбинационной схемы.

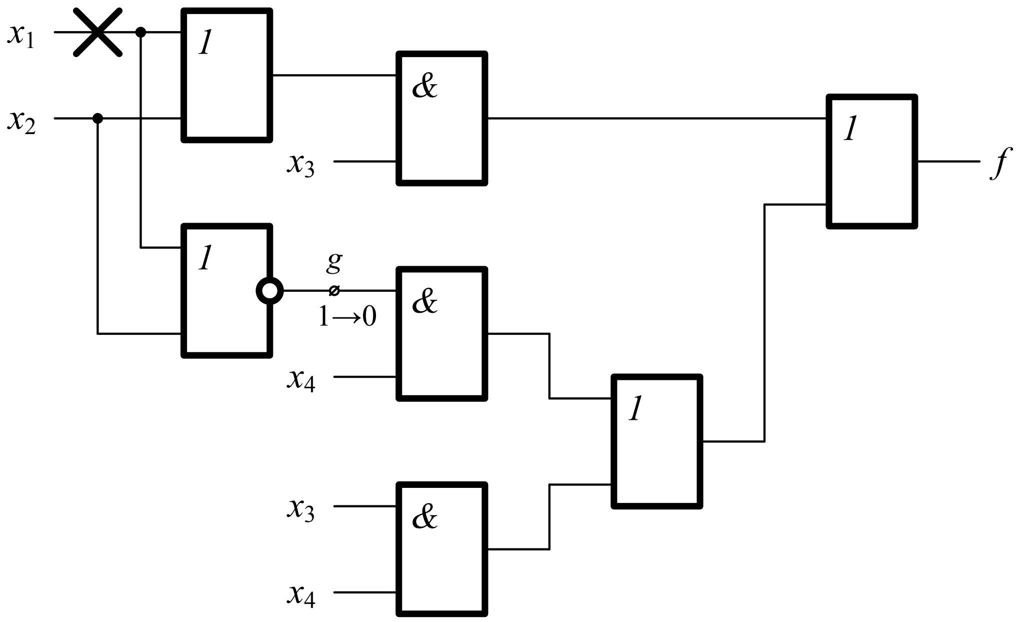
2 Методика выполнения работы

1. Ознакомиться с разделом 1 данных методических указаний, а также с § 4.3.5 учебника «Основы технической диагностики» [3].
2. Получить вариант у преподавателя.
3. Изобразить заданную комбинационную схему.
4. Записать функцию, реализуемую заданной комбинационной схемой.
5. Определить тремя способами булеву производную по входу x_k и оценить результат (вход x_k отмечен знаком «×»).
6. Определить любым из способов тестовые наборы для неисправности линии g, заданной по варианту.

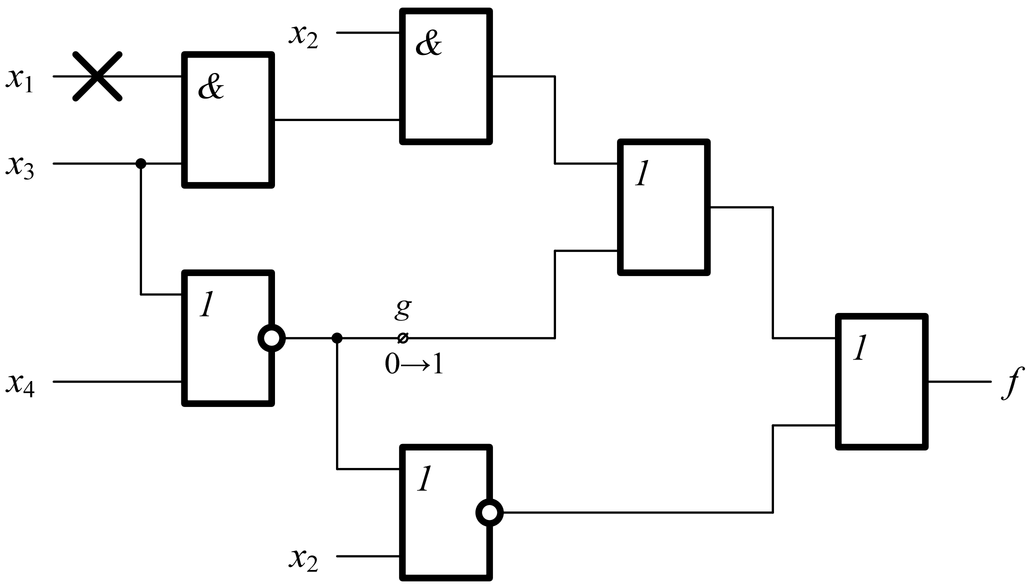
3 Варианты заданий

Вариантом задания является комбинационная схема с отмеченным знаком «×» входом x_k, для неисправности которого требуется определить условия трансляции ошибки на выход схемы, а также неисправность типа 0→1 или 1→0 на линии g, для которой требуется определить тестовые наборы.

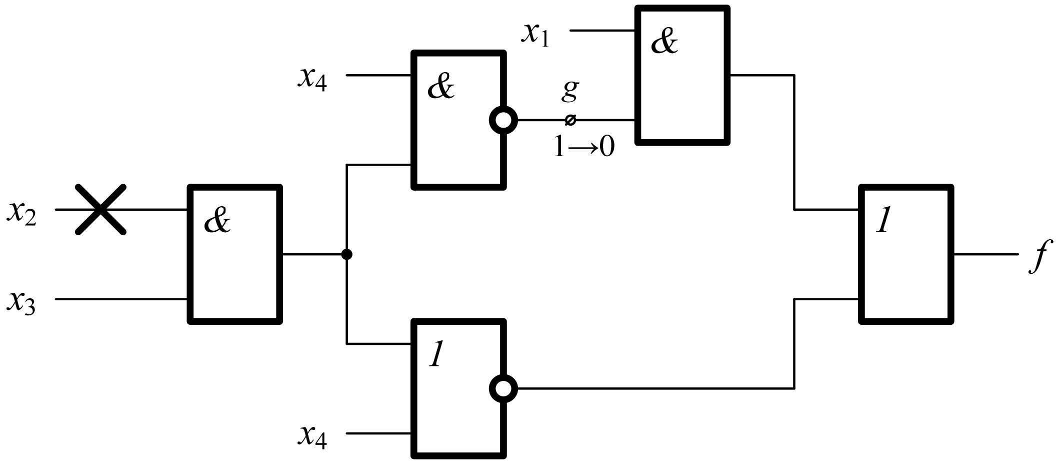
Вариант 1



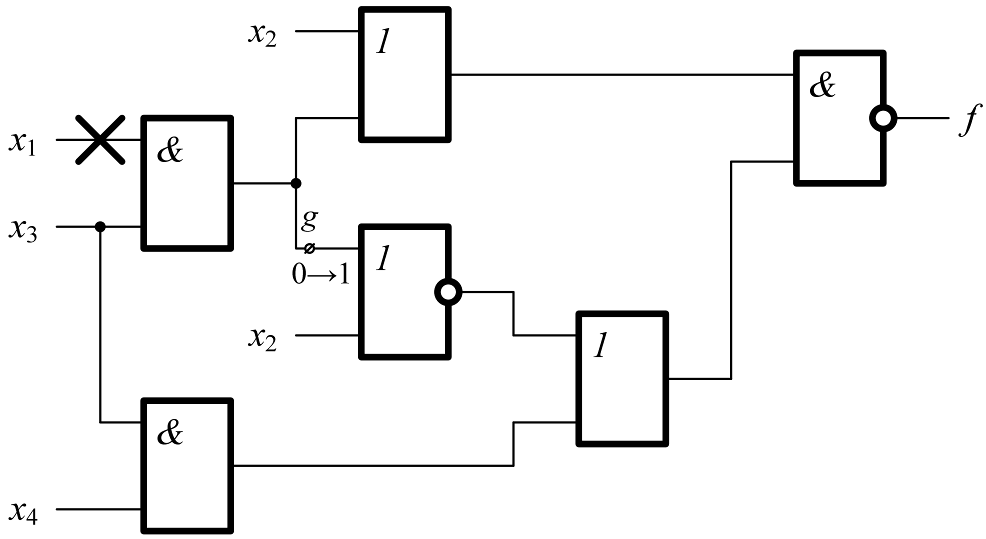
Вариант 2



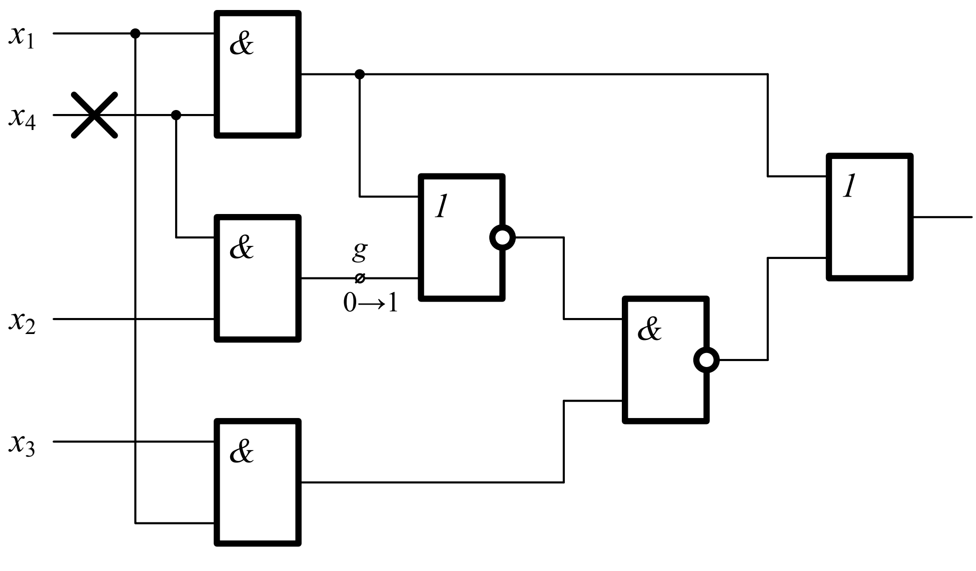
Вариант 3



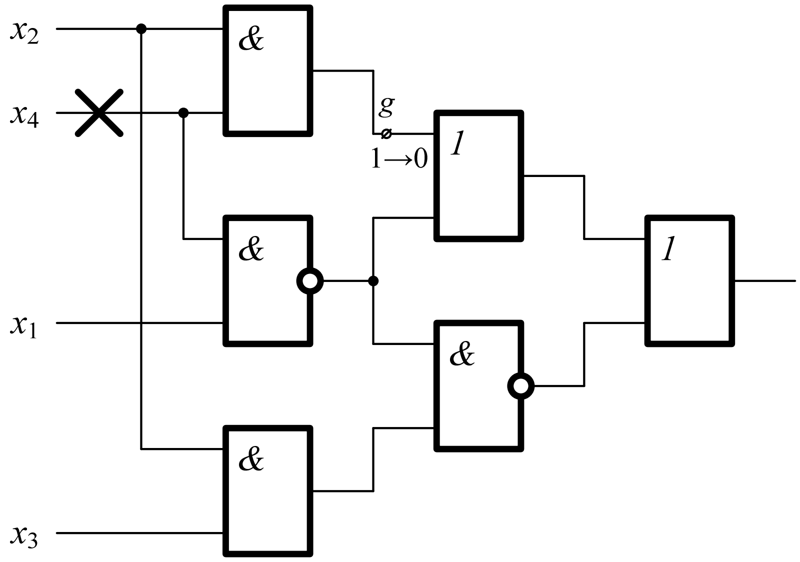
Вариант 4



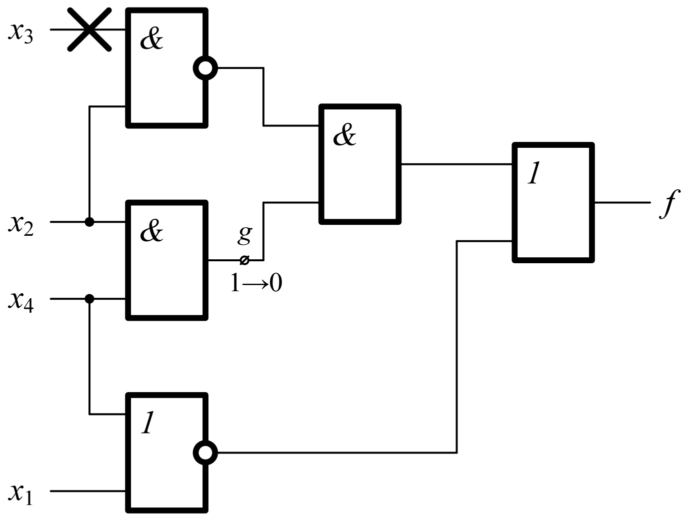
Вариант 5



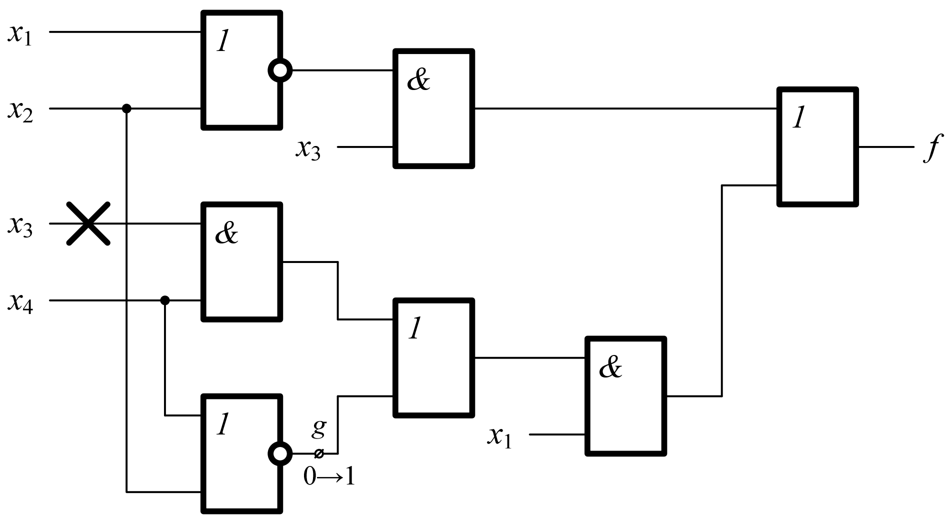
Вариант 6



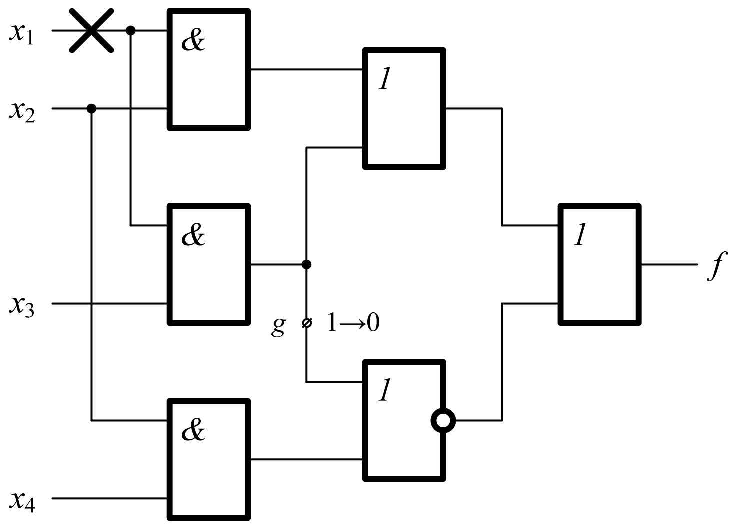
Вариант 7



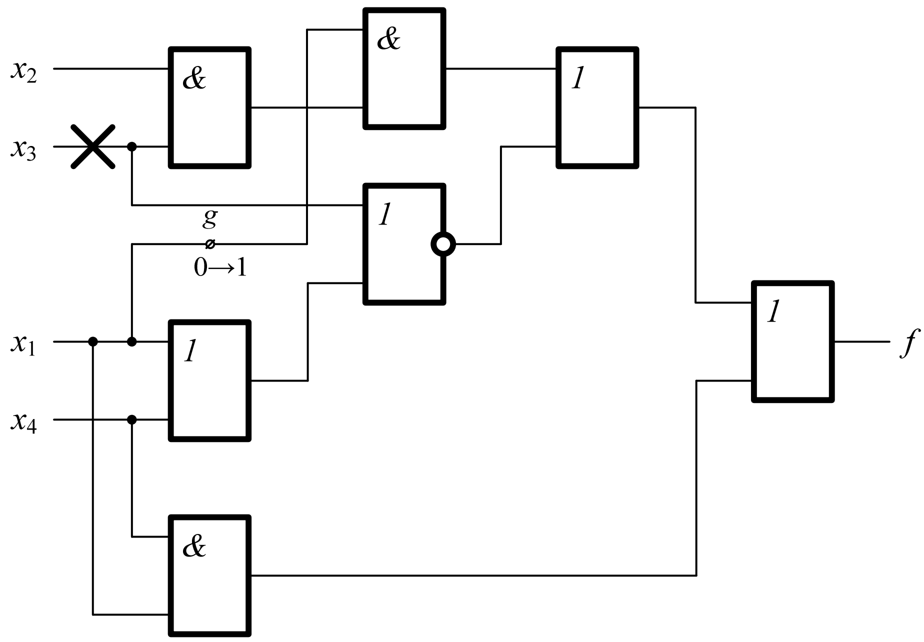
Вариант 8



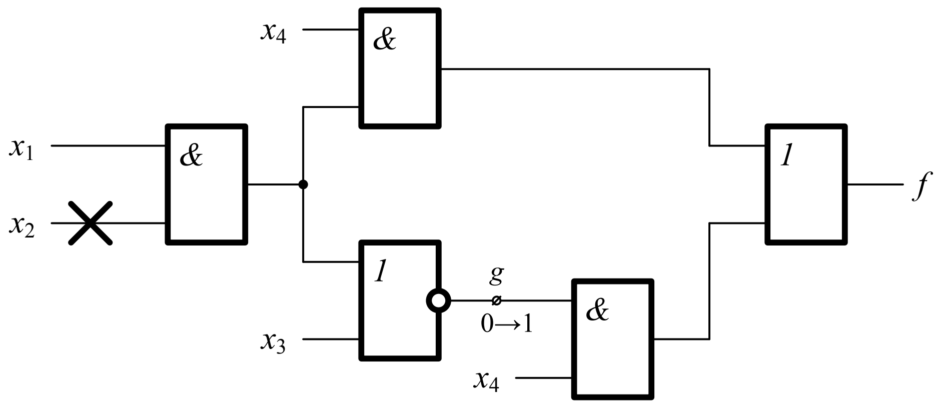
Вариант 9



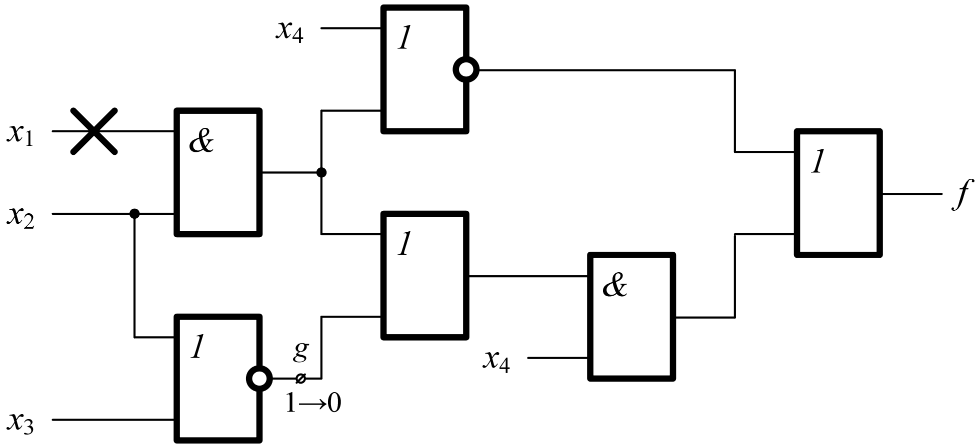
Вариант 10



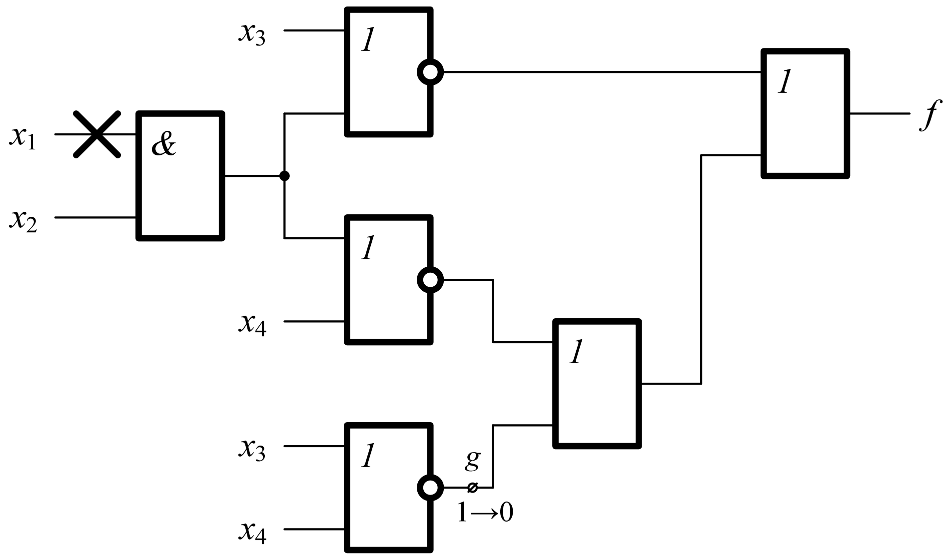
Вариант 11



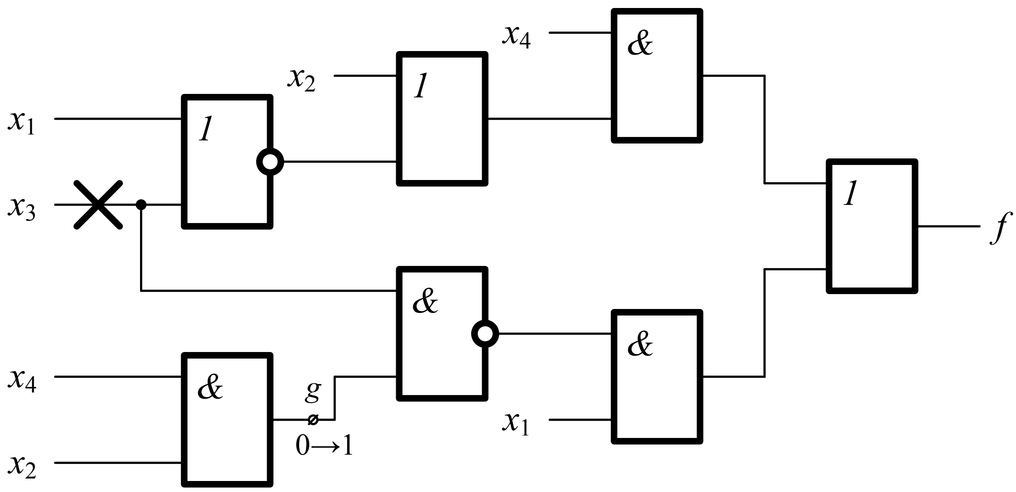
Вариант 12



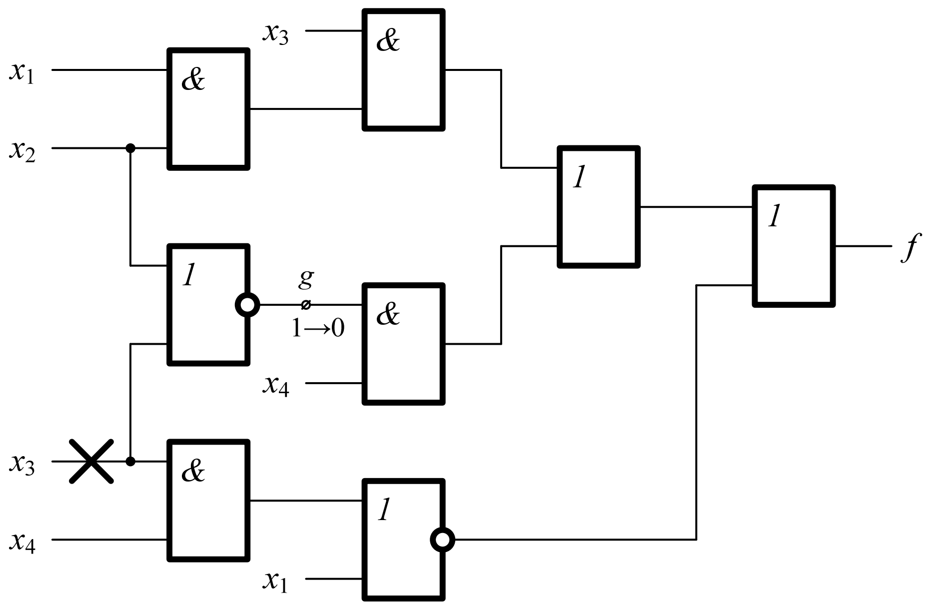
Вариант 13



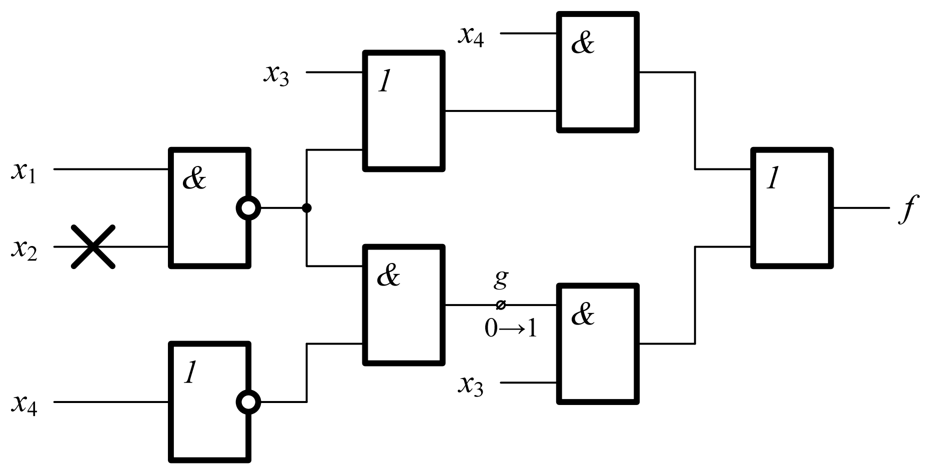
Вариант 14



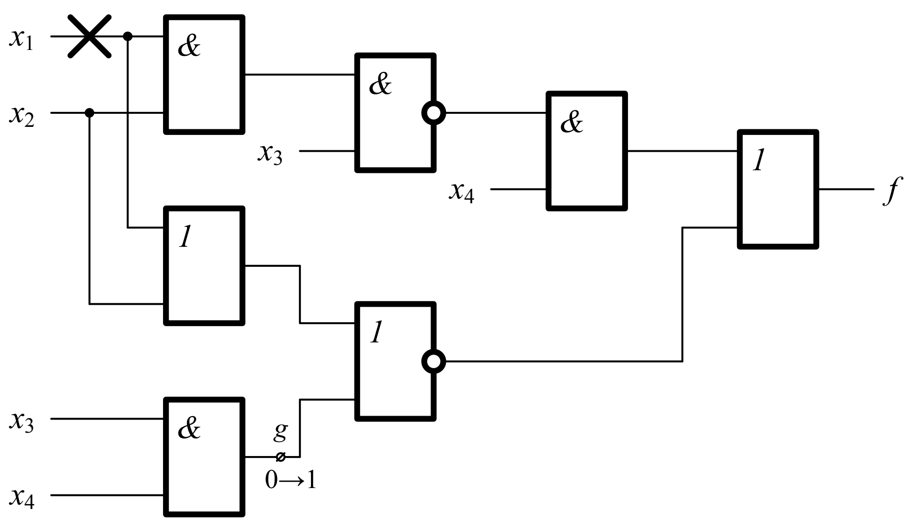
Вариант 15



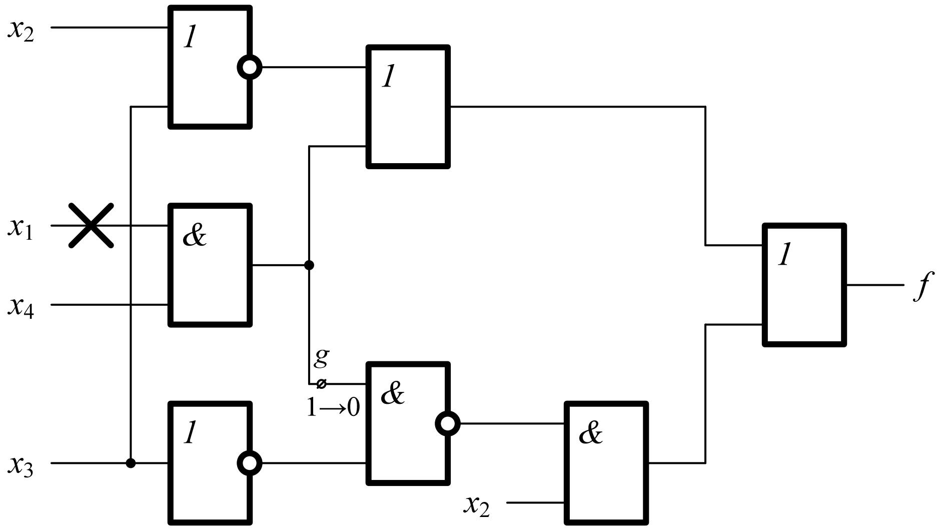
Вариант 16



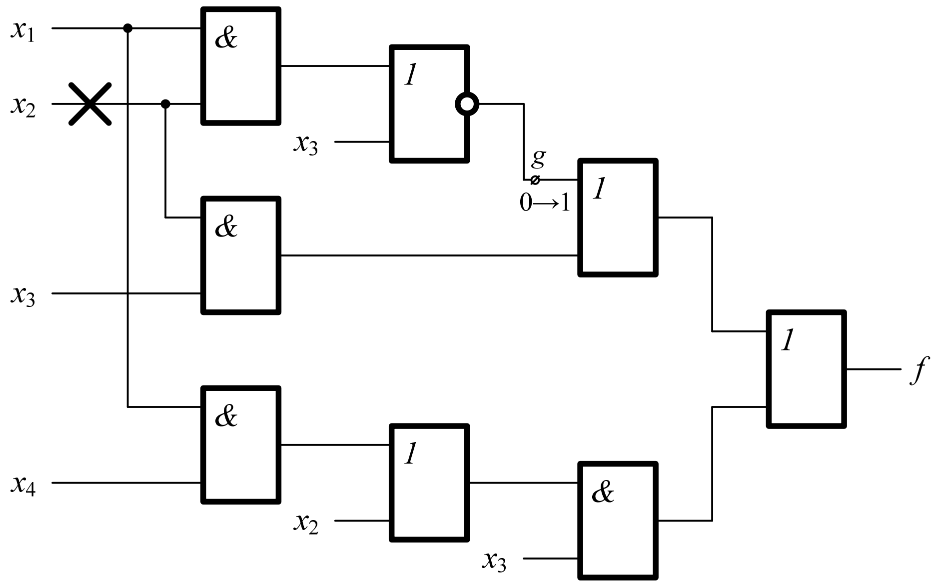
Вариант 17



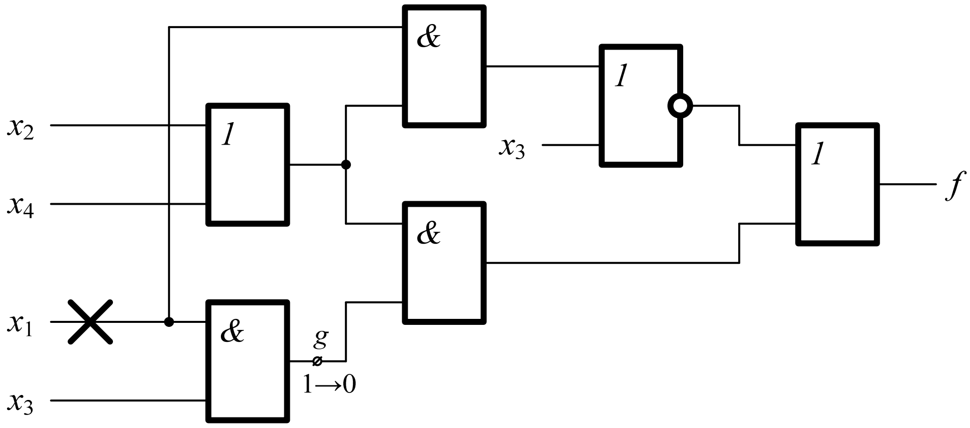
Вариант 18



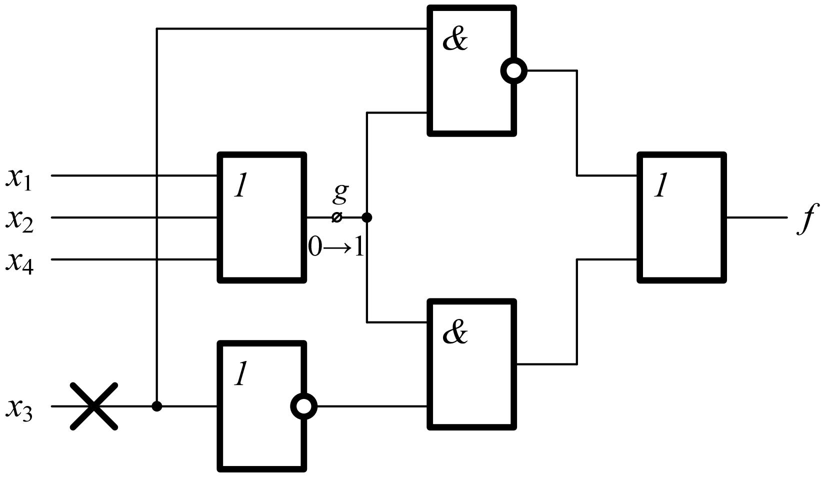
Вариант 19



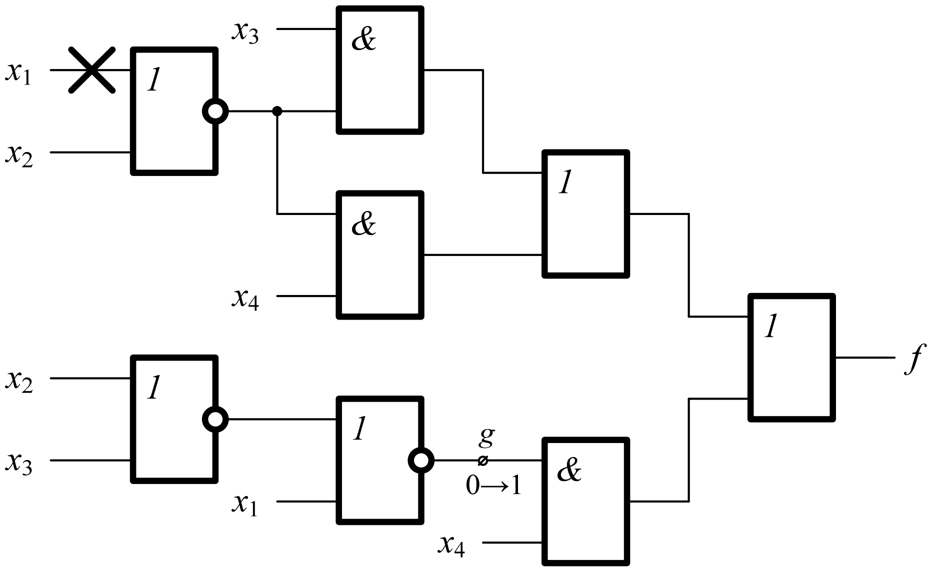
Вариант 20



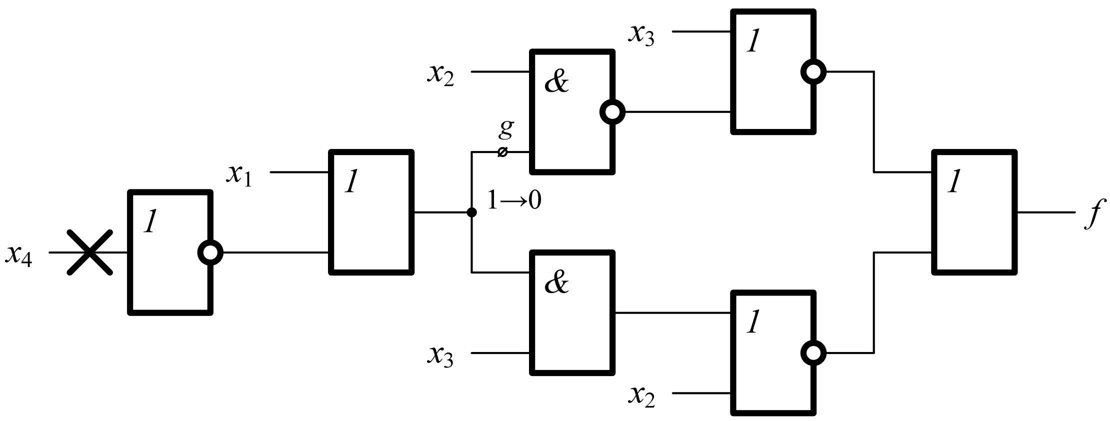
Вариант 21



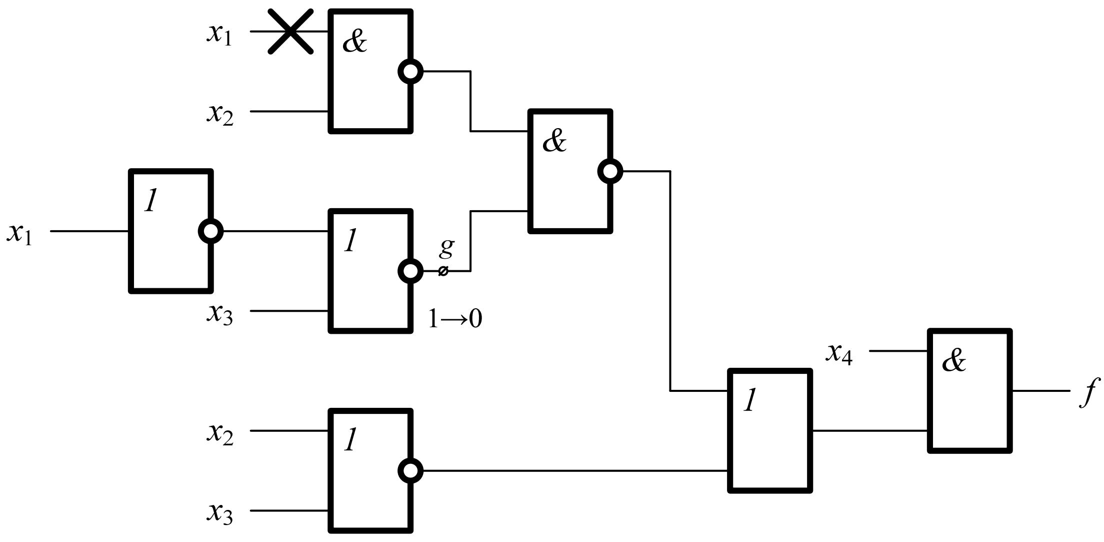
Вариант 22



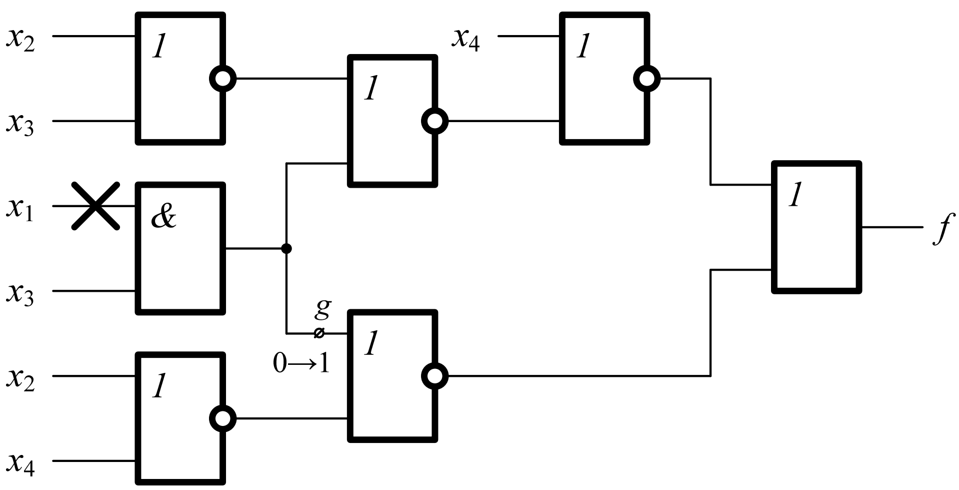
Вариант 23



Вариант 24



Вариант 25



Библиографический список

1. **Основы технической диагностики** / В. В. Карибский, П. П. Пархоменко, Е. С. Согомонян, В. Ф. Халчев; под ред. П. П. Пархоменко. – М. : Энергия, 1976. – 464 с.

2. **Надежность и эффективность в технике:** Справочник в 10 томах. – Т. 9. Техническая диагностика / Под общ. ред. В. В. Клюева, П. П. Пархоменко. – М. : Машиностроение, 1987. – 352 с.

3. **Сапожников, В. В.** Основы технической диагностики / В. В. Сапожников, Вл.В. Сапожников. – М. : Маршрут, 2004. – 316 с. – ISBN 5-89035-123-0.

4. **Сапожников, В. В.** Теория дискретных устройств железнодорожной автоматики, телемеханики и связи / В. В. Сапожников, Ю. А. Кравцов, Вл. В. Сапожников; под ред. В. В. Сапожникова. – М. : УМК МПС России, 2001. – 312 с. – ISBN 5-89035-051-X.

Содержание

Учебное издание

АНАЛИЗ НЕИСПРАВНОСТЕЙ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА БУЛЕВОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Методические указания к практическому занятию № 5
по дисциплине «Основы технической диагностики»

Разработали: доцент ***Ефанов Дмитрий Викторович***,
профессор ***Сапожников Валерий Владимирович***,
профессор ***Сапожников Владимир Владимирович***

Редактор и корректор *Г. Н. Кириллова*

Компьютерная верстка *М. С. Савастеевой*

План 2015 г., № 96

Подписано в печать с оригинал-макета 13.01.16
Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага для множ. апп. Печать ризография.
Усл. печ. л. 1,375. Тираж 200 экз.
Заказ 188.

ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.

Типография ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.