Сыромятников А. Г.

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ
В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Санкт – Петербург

1993

УДК 530.12:531.51

А. Г. Сыромятников

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Аннотация

На основе метода самосогласованного поля и анализа свойств калибровочной и пространственно-временной симметрии уравнений бесстолкновительной плазмы Власова-Максвелла формулируется эквивалентная система уравнений самосогласованного электромагнитного поля, соответствующая закону сохранения полного углового момента электромагнитного поля. Сохранение полного углового момента или сохранение спинового момента самосогласованного электромагнитного поля при выборе соответствующей калибровки или при условии релятивистской несжимаемости среды, определяет всю динамику и, вместе с тем, служит в качестве условий совместности уравнений поля.

Динамика самосогласованного поля проявляется в виде ударных спиновых волн, на фронте которых происходит переворот вектора спина электромагнитного поля. Скачок спина полностью компенсирует скачок напряженности электрического и магнитного полей на фронте волны. Этот эффект обусловлен поляризующим воздействием спина электромагнитного поля.

Рассмотрен ряд задач, допускающих точное аналитическое решение уравнений самосогласованного поля, отвечающих бессиловым конфигурациям заряженной плазмы. Показано, что учет поляризационных свойств спина электромагнитного поля позволяет стабилизировать бессиловые конфигурации в отсутствие полной токовой и зарядовой нейтрализации и без внешних источников электромагнитного поля.

Показано, что самосогласованное электромагнитное поле может быть связано с геометрическим кручением пространства-времени. При этом состояния бесстолкновительной плазмы интерпретируются в терминах геометрических характеристик кручения и кривизны пространства. Связь самосогласованного поля и кручения определяется полным электрическим зарядом и в пределе большого числа частиц аннулируется. При этом кручение и кривизна пространства обращаются в нуль, а электромагнитное поле освобождается от связи с кручением и возвращается к своему обычному виду.

Требование калибровочной инвариантности позволяет построить объединение комплекса физических полей в мультиплет полей кручения. Электромагнитному сопоставляется след кручения, полю псевдовекторных мезонов – псевдослед кручения, тензорному полю спина два(калибровочно эквивалентному торсионному полю тяготения) – бесследовая часть кручения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Метод самосогласованного поля, известный в теоретической физике также как метод коллективного или среднего поля, метод Хартри – Фока [1], получил широкое применение при решении самосогласованных задач динамики систем большого числа частиц, возникающих в практических приложениях физики плазмы, квантовой теории поля и статистической физики, физики твёрдого тела, управляемого термоядерного синтеза [2-4, 6, 12-14].

Метод самосогласованного поля состоит в том, что анализ сложной динамической системы, характеризуемой большим числом переменных при определенных допущениях, формулируемых на основе исходных уравнений динамики, может быть проведен в терминах коллективных полевых переменных, характеризующих поведение системы как целого.

Коллективные переменные представляют интегральные характеристики системы и несут всю основную информацию. Метод самосогласованного поля позволяет сформулировать в замкнутом виде уравнения для коллективных переменных, согласно которым динамика отдельных частей системы определяется коллективным самосогласованным полем, определяемым по вкладу всех частей системы. То есть метод самосогласованного поля существенным образом учитывает самодействие системы на себя как нелокальное взаимодействие.

Самосогласованность задач нелинейной электродинамики бесстолкновительной плазмы Власова-Максвелла, например, обусловлена тем, что источники самосогласованного поля, определяющего траектории движения заряженных частиц, служат плотности электрического тока и заряда этих частиц.

При теоретическом описании динамики заряженных частиц в собственных электромагнитных полях используются два подхода: кинетическое или микроскопическое описание, основанное на уравнениях Власова-Максвелла для бесстолкновительной плазмы [3-5], и макроскопическое описание, основанное на уравнениях Максвелла и уравнениях моментов кинетического уравнения Власова. Представление системы заряженных частиц и собственных электромагнитных полей в виде бесстолкновительной электрически заряженной плазмы справедливо в тех случаях, когда пространственные или временные масштабы позволяют исключить из рассмотрения взаимодействия отдельных частиц и преобладают коллективные процессы [3-5]. Нижняя граница применимости понятия бесстолкновительной плазмы, когда можно пренебречь кулоновскими столкновениями частиц, порядка дебаевского радиуса плазмы (см. [4], с. 8).

Существенную роль при изучении нестационарных процессов в бесстолкновительной плазме играют частицеподобные решения в виде солитонов или уединенных волн [6].

В рамках метода самосогласованного поля формулируется известное нелинейное уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью, связанное с ним [2] уравнение магнетика Гейзенберга, и другие нелинейные эволюционные уравнения в двумерном пространстве – времени. Все эти уравнения интегрируемы по методу обратной задачи рассеяния [2,6] или методу R – матрицы (см. [2]) в представлении нулевой кривизны как **условия совместности** переопределенной системы уравнений [2].

Иными словами такое представление уравнений самосогласованного поля в качестве некоторого условия совместности означает, что самосогласованное поле выполняет управляющую функцию, носителем которой в случае магнетика Гейзенберга служит магнитный спиновый момент магнетика. Управляющая функция спинового момента приводит к эффекту спонтанного намагничивания. К эффектам подобного рода можно отнести и явления самофокусировки оптического и звукового излучения в плазме, газах и плотных средах.

Цель настоящей работы состоит в установлении с помощью метода самосогласованного поля на широком круге самосогласованных задач ряда новых свойств, связанных с понятием спинового углового момента количества движения самосогласованного поля [7,10], отсутствующим в нерелятивистской механике.

В Части I показано, что применение метода самосогласованного поля к бесстолкновительной плазме Власова-Максвелла приводит к формулировке уравнений динамики самосогласованного поля в виде закона сохранения полного углового момента. При этом сохранение спинового момента электромагнитного самосогласованного поля (возможное при выборе определенной калибровки электромагнитного поля) представляет условие совместности исходной системы уравнений. В соответствии с представлением о спиновом магнитном моменте магнетика Гейзенберга как управляющем поле – и в этом случае – спиновый момент самосогласованного поля выполняет управляющую функцию. Динамика самосогласованного поля должна проявляться в новом явлении переворота спина на фронте ударной электромагнитной волны (как следствие доказанной теоремы о слабых разрывах на основе теоремы Грина [17] для оператора Даламбера). При учете этого эффекта скачки напряженности поля определяются скачком плотности вектора спина самосогласованного поля, и поэтому не связаны с какими-либо поверхностными зарядами и токами. Поэтому конфигурации бесстолкновительной плазмы можно стабилизировать и в отсутствие полной зарядовой и токовой нейтрализации.

Таким образом, метод самосогласованного поля позволяет выявить в динамике систем большого числа частиц самоорганизующую, управляющую функцию спинового момента электромагнитного поля. Использование понятия спинового момента, формулируемого для классического релятивистского поля, допустимо, поскольку в приближении самосогласованного поля (в главном порядке) квантование поля не требуется, так что квантовые средние наблюдаемых совпадают с их классическими величинами (см., например, [8]).

С точки зрения квантовой теории такое каласcическое самосогласованное поле соответствует ситуации, когда относительно некоторого наблюдателя определено такое состояние квантовой системы, в котором средние значения операторов совпадают с величинами, определяемыми в классической теории [8]. В методе самосогласованного поля Хартри-Фока это соответствует главному порядку разложения [1].

Анализ квазистационарных решений уравнений самосогласованного поля в плазме (Часть I) показал, что все они описывают бессиловые конфигурации, в которых траекториям движения частиц можно поставить в соответствие геодезические некоторого искривленного пространства. В связи с этим и в связи с представлением об управляющей функции спинового момента самосогласованного электромагнитного поля, выявленным методом самосогласованного поля, можно сформулировать адекватное геометрическое представление самосогласованного электромагнитного поля как следа тензора кручения пространства аффинной связности с кручением [26], геодезические которого соответствуют, в частности, упомянутым траекториям частиц в бессиловых конфигурациях. Конформная инвариантность уравнений самосогласованного электромагнитного поля в пространстве четырех измерений [8] обеспечивает нетривиальную динамику кривизны такого пространства с кручением.

Рассматриваемое в Части II погружение самосогласованного электромагнитного поля в поле связности геометрического пространства с кручением приводит при надлежащем обобщении к теории динамического кручения, источником которой служат векторный электромагнитный ток и аксиальный ток спинового момента [2,10] .Уравнения динамики самосогласованного электромагнитного поля как закон сохранения спинового момента показывают органичность такого геометрического представления, поскольку непосредственно следуют из него

Свойство конформной симметрии уравнений Максвелла в этой связи непосредственно следует из калибровочной инвариантности теории, поскольку калибровочное преобразование потенциалов электромагнитного поля как следа кручения генерирует конформное преобразование связности пространства с кручением.

Установление этого следствия в рамках объединения основных физических полей в геометрическое поле кручения приводит к тому, что спонтанное нарушение калибровочной инвариантности [1], возникающее при сверхпроводимости, должно сопровождаться нарушением группы конформной симметрии и ее подгруппы – группы масштабной симметрии. То есть, во-первых, скейлинг или масштабная инвариантность, представляется следствием калибровочной инвариантности, во-вторых, при фазовом переходе сверхпроводимости скейлинг должен быть нарушен. Это – проверяемые следствия данной теории динамическог кручения, а также – обоснование гипотезы скейлинга в глубоко-неупругом рассеянии лептонов на адронах [20].

Таким образом, использование понятия спина самосогласованного поля как источника тензорного поля кручения и геометрической (не тензорной) характеристики связности пространства с кручениемпроизвольной размерности (являющегося простейшим обобщением пространства-времени Минковского), приводит в конечном счете к к установлению однозначной связи между внутренней, скрытой, не связанной с координатными преобразованиями калибровочной симметрией электромагнитного поля и внешней конформной симметрией уравнений Максвелла для этого поля. Локализация конформной группы в качестве группы внутренней симметрии поля тяготения, включенного в состав полей кручения, может быть обеспечена кручением пространства-времени.

Часть I

Метод самосогласованного поля в задачах нелинейной электродинамики

Глава 1

§1. Закон сохранения полного углового момента электромагнитного поля как общее уравнение нелинейной динамики самосогласованного электромагнитного поля

Уравнения нелинейной динамики самосогласованного электромагнит ного поля бесстолкновительной плазмы можно получить с помощью вариационного принципа для функции действия 4-векторного электромагнитного поля, самосогласованным образом взаимодействующего с источниками в вакууме, удовлетворяющей требованиям калибровочной инвариантности и инвариантности относительно группы преобразований Лоренца. Такой подход позволяет придать точный смысл теоретическим конструкциям, построенным на основе уравнений Власова-Максвелла

Полный угловой момент электромагнитного поля в релятивистской теории содержит дополнительно к орбитальному моменту импульса собственный спиновый момент, характеризующий поляризационные свойства поля [7]. Дифференциальный закон сохранения полного углового момента следует из инвариантности теории электромагнитного поля относительно группы собственных преобразований Лоренца [10], согласно теореме Нетер [7], гарантирующей также сохранение энергии и импульса в силу инвариантности относительно группы трансляций в пространстве-времени.

В общепринятом подходе закон сохранения тензора Энергии-импульса используется в качестве уравнения нелинейной динамики, тогда как сохранение полного углового момента рассматривается как простое следствие Лоренц-инвариантности. При этом спиновый момент в классических теориях не учитывался, что связано с возможностью приведения тензора энергии-импульса к симметричному виду (тензор Белинфанте [20]), обеспечивающему сохранение механического и спинового момента по отдельности [10].

Последовательный учет спинового момента в качестве динамической переменной производится в теории Эйнштейна-Картана [33], где спин фигурирует в качестве источника геометрического поля кручения пространства аффинной связности с кручением, представляющего простейшее обобщение пространства Минковского специальной теории относительности. Однако, описание калибровочного электромагнитного поля в рамках этого подхода проблематично, поскольку отсутствует определенность в решении вопроса о виде взаимодействия электромагнитного поля с полями кручения, рассматриваемом в Части II.

В том случае, когда взаимодействие не зависит от производных поля, закон сохранения полного углового момента записывается в точно таком же виде как и для свободного электромагнитного поля без взаимодействия. Поэтому описание нелинейной динамики электромагнитного поля с учетом спинового момента на основе дифференциального закона сохранения полного углового момента содержит в себе различные виды самосогласованного взаимодействия.

В случае взаимодействия, зависящего от производных поля, например, при определении спин-спинового взаимодействия электромагнитного поля, закон сохранения углового момента отличается по виду от случая свободного действия и требует отдельного рассмотрения. Эта задача может быть рассмотрена в рамках теории Эйнштейна-Картана, где спин-спиновое взаимодействие учитывается (в силу связи спина и кручения) членом, линейным по тензору кривизны и квадратичным по тензору кручения [33]. Спин и кручение можно интерпретировать в качестве обычных динамических переменных в плоском пространстве, где свойства сохранения энергии и импульса хорошо определены.

Расписывая уравнение сохранения полного углового момента свободного поля $\mathrm{A_k}$, $\varphi = \mathrm{A_0}$:

$$\left(\frac{1}{c^2}\right)\partial_t(\varphi\,\partial_\mathrm{t}\mathrm{A_k} - \mathrm{A_k}\,\partial_\mathrm{t}\varphi) - \partial_i(\varphi\,\partial_\mathrm{i}\mathrm{A_k} - \mathrm{A_k}\,\partial_\mathrm{i}\varphi) = 0,$$

или в релятивистских обозначениях –

$$A_{[\mu}\partial^\alpha\partial_{[\alpha}A_{\nu]]} \equiv \partial_\alpha\big(A_{[\mu}\partial^\alpha A_{\nu]}\big) - A_{[\mu}\partial_{\nu]}(\partial^\alpha A_\alpha) = 0,$$

нетрудно видеть, что этому уравнению удовлетворяет не только свободное электромагнитное поле, описываемое уравнениями Максвелла без источников

$$\partial^{\alpha}\partial_{[\alpha}A_{\nu]} = 0,$$

но и поле, описываемое уравнениями Максвелла с источником j_{ν} вида

$$\partial^{\alpha}\partial_{[\alpha}A_{\nu]} = j_{\nu} = \kappa A_{\nu}$$

$$\left(A_{[\mu}A_{\nu]} \equiv A_{\mu}A_{\nu} - A_{\mu}A_{\nu} = 0\right).$$

По своему виду j_{ν} аналогично плотности 4-тока частиц среды [10] плотностью заряда к, характеризуемой 4-скоростью $\sim A_{\nu}$, если записывать 4-потенциал электромагнитного полч в калибровке Дирака $A_{\nu}A^{\nu} = 1$.

Последовательный вывод и формулирование уравнений динамики системы взаимодействующих полей и заряженных частиц будет проведен ниже. Но уже из приведенных соображений следует, что закон сохранения полного углового момента может быть использован в качестве достаточно общего уравнения нелинейной динамики электромагнитного поля, самосогласованным образом описывающего свой источник.

§2. Постановка самосогласованных задач в кинетике и гидродинамике. Вывод уравнений самосогласованного поля из кинетического уравнения Власова и уравнений Максвелла.

Возможны две модели теоретического описания динамики заряженных частиц в собственных электромагнитных полях: кинетическое, основанное на уравнениях Власова-Максвелла [3-5] для бесстолкновительной плазмы, и макроскопическое гидродинамическое описание, использующее уравнения Максвелла и уравнения моментов кинетического уравнения Власова. При использовании уравнений Власова предполагается, что исследуемая система является бесстолкновительной, то есть временные масштабы процессов, протекающих в системе, малы по сравнению со средним временем между парными столкновениями частиц.

Известно, что эволюция одночастичной функции распределения $f_{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ электрически заряженных частиц сорта α (заряда e_{α}, массы m_{α}) в конфигурационно - импульсном пространстве описывается релятивистским уравнением Власова [3]

$$\left\{\partial/\partial t + (\mathbf{v}\circ\nabla) + e_\alpha(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\times\mathbf{H}]/c)\partial/\partial\mathbf{p}\right\} f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = 0, \quad (\text{I.2.I})$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ связаны соотношением $\mathbf{p} = m_\alpha \mathbf{v}\gamma$

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}\,(1+p^2/(m_\alpha^2 c^2))^{-1/2}/m_\alpha, \quad (\text{I.2.2})$$

c - скорость света в вакууме, ∇ - оператор градиента.

Электрическое $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ и магнитное $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ поля, входящие в уравнение Власова, определяются самосогласованным образом из уравнений Максвелла

$$[\nabla\times\mathbf{E}] = -(1/c)\,\partial/\partial t\mathbf{H}, \quad (\text{I.2.3.I})$$

$$[\nabla\times\mathbf{H}] = (4\pi/c)\sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p} + 1/c\,\partial/\partial t\mathbf{E}, \quad (\text{I.2.3.2})$$

$$(\nabla\circ\mathbf{E}) = 4\pi\sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}, \quad (\text{I.2.3.3})$$

$$(\nabla\circ\mathbf{H}) = 0. \quad (\text{I.2.3.4})$$

Переход от полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ к потенциалам ϕ, $\mathbf{A}$ электромагнитного поля

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - (1/c)\,\partial_t\mathbf{A},$$

$$\mathbf{H} = [\nabla\times\mathbf{A}],$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, в уравнениях Максвелла требует выбора определенной калибровки потенциалов. Уравнения Максвелла (I.2.3.I - 4) в калибровке Лоренца

$$L = (1/c)\,\partial_t\phi + (\nabla\circ\mathbf{A}) = 0 \quad (\text{I.2.4})$$

переписываются в виде

$$\Box\phi = 4\pi\sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}, \quad (\text{I.2.5.I})$$

$$\Box\mathbf{A} = (4\pi/c)\sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}, \quad (\text{I.2.5.2})$$

где $\square = 1/c^2\partial^2_{tt} - \partial^2_{kk}$ оператор Даламбера, $\partial_k = \partial/\partial x_k$, $k=1,2,3$ ($\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ $\partial^2_{kk} = \partial^2/\partial x_k^2 = \Delta$).
В общем случае левые части уравнений записываются в виде -

$$\square\phi - (1/c)\partial_t L$$

и

$$\square(A_k) + \partial_k L$$

соответственно.

С помощью функции распределения $f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ определяются макроскопические характеристики заряженной бесстолкновительной плазмы:

плотность частиц сорта α -

$$n_\alpha(\mathbf{x},t) = \int f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}; \qquad (I.2.6.I)$$

средняя скорость-

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x},t) = \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p} \;/\; n_\alpha(\mathbf{x},t); \qquad (I.2.6.2)$$

средний импульс-

$$\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x},t) = \int \mathbf{p} f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}/n_\alpha(\mathbf{x},t); \qquad (I.2.6.3)$$

тензор давления-

$$\Pi^\alpha_{ik} = \int(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha)_i(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)_k f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}. \qquad (I.2.6.4)$$

При макроскопическом подходе используются уравнения Максвелла и уравнения моментов кинетического уравнения Власова. Уравнения Максвелла в терминах потенциалов в калибровке Лоренца (I.2.4):

$$\square\phi = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha\, n(\mathbf{x}_\alpha,t), \qquad (I.2.7.I)$$

$$\square\mathbf{A} = (4\pi/c) \sum_\alpha e_\alpha\, n_\alpha(\mathbf{x},t)\, \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x},t). \qquad (I.2.7.2)$$

Вычисление первого момента кинетического уравнения (I.2.I) дает уравнение непрерывности [3]

$$\partial_t n_\alpha + \partial_k(n_\alpha \mathbf{V}_\alpha)_k = 0. \qquad (I.2.8)$$

Второй момент кинетического уравнения дает уравнения движения заряженных частиц сорта α в самосогласованном электромагнитном поле

$$\partial_t(n_\alpha \mathbf{p}_\alpha)_i + \partial_k(n_\alpha(\mathbf{V}_\alpha)_k(\mathbf{p}_\alpha)_i) + \partial_k \Pi^\alpha_{ik} = e_\alpha(\mathbf{F}_\alpha)_i\, n_\alpha, \qquad (I.2.9)$$

$(\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{E} + [\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{H}]/c)$

Третий момент кинетического уравнения определяет закон сохранения энергии- импульса. Для замыкания цепочки уравнений необходимо сделать дополнительное предположение о виде тензора потока энергии. В случае холодной плазмы градиентом тензора давления можно пренебречь.

Раскрывая левую часть уравнений движения (I.2.9) при помощи уравнения непрерывности (I.2.8)-

$$\partial_t(n_\alpha \mathbf{p}_\alpha)_i + \partial_k(n_\alpha(\mathbf{V}_\alpha)_k(\mathbf{p}_\alpha)_i) = n_\alpha(\partial_t(\mathbf{p}_\alpha)_i + (\mathbf{V}_\alpha)_k\partial_k(\mathbf{p}_\alpha)_i) +$$

$$(\mathbf{p}_\alpha)_i(\partial_t n_\alpha + \partial_k(n_\alpha(\mathbf{V}_\alpha)_k)) = n_\alpha(d/dt(\mathbf{p}_\alpha))_i = e_\alpha\, n_\alpha(\mathbf{F}_\alpha)_i,$$

где $d/dt = \partial_t + (\mathbf{V}_\alpha)_k\partial_k$ - ковариантная (лагранжева) производная, после сокращения объемной плотности n_α в обеих частях уравнения, окончательно имеем-

$$d/dt\mathbf{p}_\alpha = e_\alpha\, F_\alpha \qquad (I.2.10)$$

- уравнение отдельной электрически заряженной частицы сорта α в самосогласованном электромагнитном поле [9].

Ковариантную производную d/dt согласно [10] можно определить в терминах переменной собственного времени τ так, что производная релятивистски инвариантной плотности частиц $\rho_0 = n/\gamma$ [10]

$$(1/\gamma)\, d\rho_0/d\tau = \partial/\partial t\rho_0 + (\mathbf{V}\circ\nabla)\rho_0.$$

В системе невзаимодействующих частиц [10] $d\rho_0/d\tau = 0$ (инвариантная плотность массы не зависит от собственного времени), поэтому выполнено уравнение

$$\partial_t\gamma + (\nabla\circ\mathbf{p}) = 0,$$

называемое релятивистским условием несжимаемости.

В гидродинамическом пределе холодной бесстолкновительной плазмы одночастичная функция распределения представима в виде

$$f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = n_\alpha(\mathbf{x},t)\,\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha),$$

где $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha)$ - трехмерная дельта-функция Дирака. В этом случае средний импульс и средняя энергия плазмы совпадают с импульсом и энергией заряженных частиц. Тензор давления обращается в нуль в силу симметрии дельта- функции. Зануляются также все высшие моменты кинетического уравнения Власова и система макроскопических уравнений гидродинамики (I.2.4,7-9) полностью определена [3].

Уравнения гидродинамики (I.2.4,7-9) допускают ряд тождественных преобразований. Расписывая поля **E**, **H** в терминах потенциалов ф, **A** (опуская в дальнейшем индекс α: $e_\alpha \to q$, $n_\alpha \to n$) с помощью векторного тождества

$$(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{p} = mc^2\nabla\gamma - (1/c)\,[\mathbf{V}\times[\nabla\times\mathbf{p}]]$$

(γ определено соотношением (I.2.2)), можно привести уравнение (I.2.IO) к виду

$$\nabla(mc^2\gamma + q\phi) + \partial_t\mathbf{G} = (1/c)\,[\mathbf{V}\times[\nabla\times\mathbf{G}], \qquad (I.2.IO.I)$$

где

$$\mathbf{G} = \mathbf{p} + (q/c)\,\mathbf{A} \qquad (I.2.IO.2)$$

– обобщенный импульс.

Действуя оператором rot ($\mathrm{rot}\mathbf{G} = [\nabla\times\mathbf{G}]$) на правую и левую части уравнения (I.2.IO.I), получаем

$$\partial_t[\nabla\times\mathbf{G}] = (1/c)\,[\nabla\times[\mathbf{V}\times[\nabla\times\mathbf{G}]]]. \qquad (I.2.II)$$

Это уравнение имеет безвихревое

$$[\nabla\times\mathbf{G}] = 0 \qquad (I.2.I2)$$

решение $\mathbf{G} = \nabla S$, единственность которого обеспечивается полагая, что (I.2.I2) выполнено в начальный момент времени при $t=0$.

В общем случае функция **G** с точностью до градиента скалярной функции, не зависящей от времени, будет удовлетворять уравнению

$$\partial_t\mathbf{G} = (1/c)\,[\mathbf{V}\times[\nabla\times\mathbf{G}]]. \qquad (I.2.I3)$$

Подставляя безвихревое решение $\mathbf{G} = \nabla S$ в уравнение (I.2.IO.I)

$$\nabla(mc^2\gamma + q\phi + \partial_t S) = 0,$$

получаем первый интеграл уравнений движения (I.2.I0)

$$mc^2\gamma + q\phi + \partial_t S = \text{const}. \qquad (I.2.I4)$$

Все проведенные выкладки справедливы для частиц любого сорта α. Для определенности далее будем считать, что плазма состоит из электронов $e_\alpha = -e$, $m_\alpha = m$.

Расписывая калибровочное условие Лоренца L=0 (I.2.4) согласно (I.2.I0.2) и (I.2.I4) относительно переменных **p**, γ-

$$L = (1/c)\, \partial\gamma_t + (\nabla\circ\mathbf{p}) - \Box Se/(mc^2) = 0. \qquad (I.2.I5)$$

При выборе калибровки Лоренца произвол от введения потенциалов еще не устранен полностью, поскольку уравнения Максвелла инвариантны также относительно градиентных преобразований II рода вида $\phi \to \phi + (1/c)\, \partial_t f$, $\mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla f$ с производящей функцией f, удовлетворяющей волновому уравнению $\Box f = 0$ ([7], c.42). Поэтому если функция S удовлетворяет волновому уравнению, то за счет выбора калибровки II рода f = -eS, можно обеспечить выполнение $\mathbf{p} = (e/c)\,\mathbf{A}$, причем импульс (как видно из (I.2.I5)) будет удовлетворять релятивистскому условию несжимаемости

$$(1/c)\, \partial_t\gamma + (\nabla\circ\mathbf{p}) = 0.$$

Соотношение $\mathbf{p}=(e/c)\mathbf{A}$ совместно с интегралом (I.2.I4) $\gamma=1+e\phi/(mc^2)$ эквивалентно выбору калибровки Дирака

$$\mathbf{A}^2 + (mc^2/e)^2 = \gamma^2, \qquad (I.2.I6)$$

в которой только три компоненты релятивистского 4 - потенциала (ϕ,**A**) независимы.

Подставляя зарядовую плотность $\rho_e = -en$ из (I.2.7.I) в правую часть (I.2.7.2), учитывая что скорость $\mathbf{V} = \mathbf{p}/(m\gamma)$, имеем-

$$\Box\mathbf{A} = \mathbf{A}\, \Box\gamma/\gamma \qquad (I.2.I7)$$

при дополнительном условии Лоренца (I.2.4) (вид калибровки,в которой уравнение самосогласованного поля принимает такой вид будет определен ниже). Все остальные переменные исходной системы выражаются через **A**. Уравнение (I.2.I7), переписанное виде

$$\gamma\Box\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k\Box\gamma = (c1/c^2)\partial_t(\gamma\partial_t\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k\partial_t\gamma) - \partial_i(\gamma\partial_i\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k\partial_i\gamma)=0,$$

где левая часть - 4- дивергенция тензорной величины, представляет закон сохранения тензора собственного углового момента поля **A**, определенного согласно §I Части I.

Окончательно в общем случае в калибровке Дирака (I.2.I6) уравнения самосогласованного электромагнитного поля **A** записываются в виде

$$\Box\mathbf{A} + \nabla(1/c\,\partial_t\gamma + (\nabla\circ\mathbf{A})) = \mathbf{A}\gamma^{-1}(\Box\gamma - (1/c)\partial_t((1/c)\partial_t\gamma + (\nabla\circ\mathbf{A}))). \tag{I.2.I8}$$

Непротиворечивость уравнений (I.2.I8) и уравнений гидродинамики проверяется прямой подстановкой.

Эта система уравнений представляет условие совместности исходной системы уравнений которая переопределена, поскольку зарядовая плотность ρ_e, выраженная в терминах потенциала **A** самосогласованного поля уже не может быть произвольно заданной.

§ 3. Формулировка уравнений самосогласованного поля в релятивистски инвариантном виде.

В релятивистских обозначениях производная $\partial_\alpha = ((1/c)\partial_t, \partial_k)$, $\alpha=0,1,2,3$ $k=1,2,3$, $\partial_\alpha = g_{\alpha\mu}\partial^\mu$, $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор, $\Box = \partial_\alpha\partial^\alpha$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Нетрудно проверить, что потенциалы γ, **A** самосогласованного электромагнитного поля под действием преобразований Лоренца преобразуются как компоненты 4-вектора $(\mathbf{u}_\alpha) = (\gamma, e\mathbf{A}/(mc^2))$. Поэтому в некоторых случаях будет удобно считать компоненты $\mathbf{u}_\alpha$ независимыми и накладывать условие связи $\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}^\alpha = \gamma^2 - (e\mathbf{A}/(mc^2))^2 = 1$ отдельно.

С учетом этих замечаний система уравнений (I.2.I6) представима в виде

$$\partial_\alpha \mathbf{S}^\alpha_{\mu\nu} = 0, \tag{I.3.I}$$

где $\mathbf{S}^\alpha_{\mu\nu} = \mathbf{u}_\mu\partial^\alpha\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_\nu\partial^\alpha\mathbf{u}_\mu = 2\mathbf{u}_{[\mu}\partial^\alpha\mathbf{u}_{\nu]}$ - тензор спинового момента самосогласованного поля $\mathbf{u}_\alpha$, антисимметричный по нижним индексам. Из этих шести уравнений лишь три являются независмыми. Значения $\mu=0$, $\nu=1,2,3$ соответствуют системе (I.2.I6), а дополнительные три уравнения следуют из этой системы.

Закон сохранения тензора спинового момента обеспечивает при достаточно быстром убывании полей на бесконечности сохранение интегралов

$$\mathbf{P}_k = \int \mathbf{u}_{[0}\partial^0 \mathbf{u}_{k]} dx$$

и

$$S_i = \varepsilon_{ikl} \int \mathbf{u}_{[k}\partial^0 \mathbf{u}_{l]} dx$$

где $\mathbf{S}$ - вектор спина самосогласованного электромагнитного поля, ε_{ikl} - антисимметричный тензор, интегрирование проводится по всему пространству R_3.

В общем случае система уравнений (I.2.I8) в калибровке Дирака представима в виде

$$\mathbf{u}_{[\mu}\partial^\alpha\partial_{[\alpha}\mathbf{u}_{\nu]]} = \partial_\alpha(\mathbf{u}_{[\mu}\partial^\alpha\mathbf{u}_{\nu]}) - \mathbf{u}_{[\mu}\partial_{\nu]}(\partial^\alpha\mathbf{u}_\alpha) = 0, \quad (I.3.2)$$

$$\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}^\alpha = 1. \quad (I.3.3)$$

Система (I.3.3) представляет условия совместности уравнений Максвелла

$$\partial^\alpha\partial_{[\alpha}\mathbf{u}_{\mu]} = (4\pi/c)\,\rho_e\mathbf{u}_\mu, \quad (I.3.4)$$

где $\mathbf{J}_\mu = \rho_e\mathbf{u}_\mu$ - 4- вектор плотности тока.

$$\rho_e = (1/(4\pi))\,\mathbf{u}^\mu\partial^\alpha\partial_{[\alpha}\mathbf{u}_{\mu]}$$

- инвариантная плотность электрического заряда, выраженная в терминах 4 - вектора- потенциала электромагнитного самосогласованного поля $\mathbf{u}_\alpha$.

Калибровочное условие Лоренца записывается в виде

$$\partial^\alpha \mathbf{A}_\alpha = 0.$$

Особенность системы уравнений (I.3.4) состоит в том, что в уравнении для компоненты $\mathbf{u}_0$ отствует вторая производная по времени. Поэтому это уравнение относительно $\mathbf{u}_0$ представляет связь первого рода. Связь второго рода в этом случае обеспечивает уравнение непрерывности или уравнение сохранения тока

$$4\pi\,\partial_\nu(\rho_e \mathbf{u}^\nu) = \partial_\nu(\mathbf{u}^\nu \mathbf{u}^\mu \partial^\alpha \partial_{[\alpha}\mathbf{u}_{\mu]}) = 0. \qquad (I.3.5)$$

Это уравнение переписывается в виде

$$\partial_\alpha \mathbf{u}^\alpha = -\mathbf{u}_\alpha \partial^\alpha \rho_e/\rho_e. \qquad (I.3.6)$$

В правой части (I.3.6) содержится субстанциональная производная инвариантной зарядовой плотности $d\rho_e/d\tau$. В случае релятивистски несжимаемой жидкости, когда $d\rho_e/d\tau = 0$ правая часть (I.3.6) обращается в нуль) и (I.3.6) принимает вид

$$\partial_\alpha \mathbf{u}^\alpha = 0$$

калибровочного условия Лоренца, что и обеспечивает выполнение закона сохранения спинового момента самосогласованного поля (I.3.I).

§ 4. Вариационный принцип для электромагнитного поля с самодействием. Калибровка Дирака.

Система уравнений гидродинамики холодной бесстолкновительной плазмы может быть получена также с помощью вариационного принципа для электромагнитного поля, взаимодействующего с источниками в вакууме. Функция Лагранжа в случае, когда источники распределены в вакууме в виде " пылевидной среды невзаимодействующих между собой частиц" [9],

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{эм}} + \frac{1}{c} A_n j^n - \frac{1}{2} æ_0 u_n u^n,$$

где A_n - компоненты 4- потенциала электромагнитного поля,

$$\mathcal{L}_{\text{эм}} = -\frac{1}{4}(\partial_m A_n - \partial_n A_m)(\partial^m A^n - \partial^n A^m)$$

- лагранжиан свободного электромагнитного поля, записанный в эквивалентном лагранжиану [9] калибровочно инвариантном виде, u_n - компоненты 4 - скорости, $j_n = \rho_e u_n$ - 4 - вектор тока, ρ_e - инвариантная зарядовая плотность частиц ($\rho_e = (-e/m)æ_0$), $æ_0$ - инвариантная объемная плотность массы частиц.

Производя вариацию действия $\delta S = \delta\left[\int \mathcal{L} d^4x\right]$ при фиксированных

u_n, j_n, и применяя вариационный принцип $\delta S = 0$, получаем уравнения Лагранжа- Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_l} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)},$$

которые принимают вид

$$\frac{\partial F^{lk}}{\partial x^k} = \frac{1}{c}\, j^l.$$

Расписывая в этом уравнении тензор электромагнитного поля

$$F^{lk} = c\left(\frac{\partial A^k}{\partial x_l} - \frac{\partial A^l}{\partial x_k}\right),$$

получаем уравнения Максвелла (I.3.4) для самосогласованного электромагнитного поля.

Применение вариационного принципа к функции действия $\delta S = 0$ при фиксированных A^n, j^n дает следующие уравнения Лагранжа- Эйлера -

$$-æ_0\frac{du_l}{d\tau} + \frac{\rho_0}{c}\,\frac{dA_l}{d\tau} = \frac{1}{c}\, j_k\frac{\partial A^k}{\partial x^l}$$

τ - собственное время. Так как $\frac{dA_l}{d\tau} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k}\, u^k$, то

$$æ_0\frac{du_l}{d\tau} = \frac{1}{c}\, j_k F^{kl}. \qquad (I.4.I)$$

Правая часть этого выражения - релятивистское обобщение объемной силы Лоренца [9]

$$\frac{1}{c}\, j_k F^{kl} = \rho_e\,(E^l + \frac{1}{c}[jxH]^l). \qquad (I.4.2)$$

Временная компонента (I.4.I) -

$$j_l F^{l0} = (jE)$$

равна работе силы Лоренца при перемещении зарядов.

Пространственные компоненты уравнения (I.4.I) соответствуют уравнениям движениия вида (I.2.I0). Следуя подходу, изложенному выше, можно показать, что уравнения движения (I.4.2) приводят к соотношению

$$p^m = \frac{e}{c} A^m, \tag{I.4.3}$$

связывающему 4 - импульс $p^n = mcu^n$ и 4 - потенциал собственного электромагнитного поля A^n с точностью до градиентного преобразования потенциалов $A_m \to A_m + \frac{\partial f}{\partial x^m}$. В силу этого соотношения лоренц - инвариант $p_n p^n = m_0^2 c^4$ определяет условие связи компонент A_m.

Таким образом показано, что на экстремалях лагранжиана $\mathcal{L}$, полученных варьированием по u_n при фиксированных A_n, j_n, должно быть выполнено соотношение (I.4.3), которое в терминах переменных u_n приводит к калибровочному условию Дирака

$$u_n u^n = 1.$$

В терминах новых полевых переменных $u_m = A_m e/mc^2$ лагранжиан $\mathcal{L}$ приводится к виду

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_m u_n - \partial_n u_m)(\partial^m u^n - \partial^n u^m)(mc^2/e)^2 + (mc^2/e)\rho_e u_n u^n$$

лагранжиана действительного векторного поля с самодействием, поскольку из уравнений Лагранжа - Эйлера данной вариационной задачи следует, что ρ_e представима в терминах поля u_m. Условие $u_m u^m = 1$ накладывается отдельно и при варьировании $\mathcal{L}$ считается фиксированным.

Уравнения Эйлера этой задачи совпадают с уравнениями (I.3.4) самосогласованного электромагнитного поля.

$$\partial^\alpha \partial_{[\alpha} u_{\mu]} = (4\pi/c)\, \rho_e u_\mu,$$

где $J_\mu = \rho_e u_\mu$ - 4- вектор плотности тока.

$$\rho_e = (1/4\pi)\, u^\mu \partial^\alpha \partial_{[\alpha} u_{\mu]}.$$

§ 5. Закон сохранения полного углового момента электромагнитного

поля как условие совместности уравнений Эйлера вариационной задачи для действительного векторного поля с самодействием.

В § 4. показано, что уравнения самосогласованного электромагнитного поля (I.3.4) можно получить как уравнения Эйлера вариационной задачи (I.4.4) для действительного векторного поля u_m. Система (I.3.4) состоит из четырех уравнений для четырех компонент поля u_m из которых лишь три компоненты независимы в силу условия $u_m u^m = 1$ и того, что согласно (I.4.5) инвариантная плотность заряда задана в терминах полевых функций. Следовательно, система (I.3.4) переопределена и поэтому требует формулирования условий совместности. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (I.3.4) на u_ν и произвести альтернирование по нижним индексам μ и ν. В результате этих операций получается эквивалентная исходной система уравнений вида (I.2.I8) в калибровке Дирака

$$u_{[\mu}\partial^\alpha\partial_{[\alpha}u_{\nu]]} = \partial_\alpha(u_{[\mu}\partial^\alpha u_{\nu]}) - u_{[\mu}\partial_{\nu]}(\partial^\alpha u_\alpha) = 0, \quad (I.5.I)$$

$$u_\alpha u^\alpha = 1. \quad (I.5.2)$$

Уравнения (I.5.I) представляют условия совместности уравнений Эйлера (I.3.4). Вместе с тем эти уравнения определяют закон сохранения полного углового момента $M^\alpha_{\mu\nu}$ действительного векторного поля u_μ

$$\partial_\alpha M^\alpha_{\mu\nu} = 0, \quad (I.5.3)$$

который должен иметь место согласно теореме Нетер в силу инвариантности функции действия S с лагранжианом (I.4.4) относительно группы собственных преобразований Лоренца [9]. В этом нетрудно убедиться, расписывая в терминах полей u_μ 4 - дивергенцию (I.5.3) тензора полного углового момента, состоящего из тензора момента импульса

$$M_O^{ml.k} = x^m T^{lk} - x^l T^{mk}$$

и тензора спинового момента

$$S^\alpha_{\mu\nu} = u_{[\mu}\partial^\alpha u_{\nu]}$$

действительного векторного поля, и используя закон сохранения

$$\partial_l T^{lk} = 0$$

канонического тензора энергии- импульса

$$T^{lk} = -\frac{1}{2}\partial^k u_m(\partial^l u^m - \partial^m u^l) - g^{lk}\mathcal{L}$$

поля u_μ, следующий согласно теореме Нетер из инвариантности функции действия S относительно группы трансляций в пространстве- времени.

Теорема Нетер утверждает [5], что инвариантности функции действия $S = \int \mathcal{L} d^4x$ относительно всякой группы преобразований с конечным числом параметров соответствует выполнение дифференциального закона сохранения.

Следует заметить, что в данном случае закон сохранения (I.5.3) тензора полного углового момента самосогласованного электромагнитного поля M^a_{bc} есть не просто следствие релятивистской инвариантности теории согласно теореме Нетер, но обеспечивает совместность уравнений Эйлера (I.3.4) в качестве условия совместности и определяет закон динамики самосогласованного поля.

Ранее спиновый момент $S^\lambda_{\mu\nu}$, входящий в состав полного углового момента, в классических теориях не учитывался, что связано с тем фактом, что симметрия рассматриваемых гамильтонианов обеспечивала сохранение механического и спинового момента по отдельности [9].

В данном случае учет собственного спинового момента, как части полного углового момента,существененен и для обеспечения выполнения условий совместности уравнений Эйлера, и в уравнениях нелинейной динамики самосогласованного электромагнитного поля.

Глава 2.

Динамика самосогласованного поля.

§I. Калибровка, обеспечивающая закон сохранения спинового момента электромагнитного поля (собственного углового момента классического поля). Условие несжимаемости.

При формулировании уравнений самосогласованного поля в виде закона сохранения полного углового момента использовалась калибровка Дирака в которой вектор - потенциал электромагнитного поля пропорционален вектору 4- скорости u_m. Уравнения самосогласованного поля могут быть записаны и в другом виде при выборе другой калибровки физически эквивалентной первой. При выборе калибровки удобно использовать известную неопределенность выбора тензора энергии - импульса, от симметрии которого зависит сохраняются ли спиновый и орбитальный моменты по отдельности. Выбор тензора энергии - импульса в симметричном виде, обеспечивающем сохранение спинового момента, всегда возможен, и поэтому также возможно определение калибровки, обеспечивающей требуемое свойство сохранения спина самосогласованного электромагнитного поля.

Расписывая 4- скорость u_ν в уравнениях Максвелла в терминах 4 - потенциала A_ν -

$$\partial^\alpha \partial_{[\alpha} A_{\mu]} = (4\pi/c)\, \rho_e u_\mu = (4\pi/c)\, \rho_e (A_\mu + \partial_\mu \sigma), \qquad (2.I.I)$$

потребуем выполнения условия

$$-\partial_\mu (\partial_\alpha A^\alpha) = (4\pi/c) \rho_e \partial_\mu \sigma. \qquad (2.I.2)$$

В этом случае уравнение (I.2.I) записывается в виде

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu = (4\pi/c)\, \rho_e A_\mu. \qquad (2.I.3)$$

Умножая обе части этого уравнения на A_ν и альтернируя по индексам μ и ν, получаем закон сохранения тензора спинового момента

$$\partial_\alpha S^\alpha_{\mu\nu} = 0,$$

$$\partial_\alpha (A_\mu \partial^\alpha A_\nu - A_\nu \partial^\alpha A_\mu) = 0, \qquad (2.I.4)$$

так как

$$\partial_\alpha A_{[\mu} \partial^\alpha A_{\nu]} = 0.$$

Таким образом, калибровочное условие (2.I.2) действительно обеспечивает сохранение спинового момента самосогласованного электромагнитного поля. Вместе с тем сохранение спинового момента обеспечивает и условие релятивистской несжимаемости среды, при выполнении которого из уравнения непрерывности (I.3.6) как связи второго рода относительно компоненты u_0 следует $\partial_\alpha u^\alpha = 0$, эквивалентное условию Лоренца.

Закон сохранения тензора спинового момента обеспечивает при достаточно быстром убывании полей на бесконечности сохранение 6 интегралов

$$P_k = \int u_{[0}\partial^0 u_{k]}dx \tag{2.I.5}$$

и

$$S_i = \varepsilon_{ikl}\int u_{[k}\partial^0 u_{l]}dx \tag{2.I.6}$$

где S – вектор спина самосогласованного электромагнитного поля, ε_{ikl} – антисимметричный тензор, интегрирование проводится по всему пространству R_3. 3 – векторы P и S характеризуют поляризационные свойства поля.

Если положить $\sigma = \text{const}$, то условие (2.I.2) будет определять обобщенную калибровку Лоренца

$$\partial_\alpha A^\alpha = \sigma. \tag{2.I.7}$$

Однако, в этом случае должно быть выполнено и калибровочное условие Дирака

$$A_\alpha A^\alpha = 1. \tag{2.I.8}$$

Свойство сохранения спинового момента согласно уравнению (2.I.4) допускает корректное определение нелинейной динамики поля и в случае, определения решения система уравнений (2.I.4,7,8) в разрывных, обобщенных функциях. Динамика самосогласованного поля будет связана с явлением переворота спина электромагнитного поля на фронте ударной электроманитной волны.

§ 2. Ударные электромагнитные волны. Теорема о слабых разрывах (на базе теоремы Грина).

Ударные электромагнитные волны в нелинейных средах формируются за счет дисперсии и диссипации энергии на фронте ударной волны. Теоретическое описание ударных волн производится в терминах разрывных обобщенных функций. Формулировка вариационного принципа для электромагнитного поля (§ 4, Глава I, Часть I) позволила осмыслить уравнения самосогласованного поля как закон сохранения полного углового момента, определяющий нелинейную динамику самосогласованного электромагнитного поля. В калибровке (2.I.2) уравнения поля

$$u_n \Box u_m - u_m \Box u_n = 0 \qquad (2.2.\text{I})$$

переписываются в виде закона сохранения собственного спинового момента самосогласованного поля u_α:

$$\partial_\alpha (u_n \partial^\alpha u_m - u_m \partial^\alpha u_n) = 0; \qquad (2.2.2)$$

и поэтому допускают разрывные решения вида ударных электромагнитных волн слабого разрыва, когда разрывны производные первого порядка от u_n, а сами функции u_n и их производные второго порядка непрерывны. Условия при которых это имеет место определяются теоремой о слабых разрывах, формулируемой на базе теоремы Грина для оператора Даламбера $\Box$.

Теорема о слабых разрывах

Уравнения самосогласованного электромагнитного поля (2.2.I), представляющие систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, допускают разрывные решения вида слабого разрыва, когда разрывны производные первого порядка от u_m, а сами компоненты поля u_m и их вторые производные непрерывны, если выполнены **кинематическое и динамическое** условия совместности, обеспечивающие справедливость **формулы Грина**

$$\int_\Omega d\tau (u_n \Box u_m - u_m \Box u_n) = \int_{\partial\Omega} d\Sigma (u_n \mathbb{P}(u_m) - u_m \mathbb{P}(u_n)), \qquad (2.2.3)$$

где Ω - область четырехмерного псевдоэвклидова пространства, $\partial\Omega$ - трехмерная гиперповерхность, ограничивающая Ω, оператор $\mathbb{P}(u)$ определяется как

$$\mathbb{P}(u) = \partial_x u \cos(n,x) + \partial_y u \cos(n,y) + \partial_z u \cos(n,z) - \partial_t u \cos(n,t), \qquad (2.2.4)$$

где n – направление внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, **в указанном случае слабого разрыва на поверхности** σ, разбивающей область Ω на две части $\Omega 1$ и $\Omega 2$, так что формула Грина (2.2.3) остается справедливой для каждой из них по отдельности.

Кинематическое и динамическое условия совместности для четырехмерного псевдоэвклидова пространства формулируются путем обобщения условий совместности для случая пространства трех измерений, сформулированных В.И. Смирновым [16].

Следствие Теоремы о слабых разрывах.

Некоторые компоненты вектора спина $S_k = \varepsilon_{kmn} \int d^3x\, S^0_{mn}$ самосогласованного электромагнитного поля, вычисленные в областях $\Omega 1$ и $\Omega 2$ по отдельности, будут испытывать скачок или переворот вектора спина при переходе через σ из $\Omega 1$ в $\Omega 2$, сохраняя значение соответствующей компоненты суммарного спина, взятого по всему объему Ω, неизменной (например, $S_1 = 0$). Поверхность σ – характеристическая для уравнения $\square u = 0$. Это означает, что фронт ударной электромагнитной волны переворота спина распространяется со скоростью света в вакууме.

§ 3. Кинематическое и динамическое условия совместности.

Кинематическое условие совместности для случая трех измерений заключается в требовании, чтобы производная $\partial u_m / \partial l$ по направлению l, лежащему в касательной плоскости к σ в некоторой точке M, при приближении к этой точке с обеих сторон поверхности σ, имела один и тот же предел и этот предел равнялся производной от функции u_m на самой поверхности σ, взятой по направлению l.

Динамическое условие совместности требует, чтобы выражение (2.2.4) при приближении к любой точке поверхности σ обладало одинаковыми пределами на обеих сторонах, если в каждом отдельном случае брать одно и то же направление нормали к σ, взятой в этой точке.

Если тогда применить формулу (2.2.3) для $\Omega 1$ и $\Omega 2$, то на поверхности σ направление внешней нормали в этих двух случаях будет противоположным, так что выражение $P(u_m)$ для написанных двух интегралов будет отличаться только знаком. Складывая эти две формулы, получим формулу (2.2.3) для всего объема Ω, так как два интеграла, взятые по σ взаимно сократятся. Поэтому при сделанных предположениях относительно разрыва u_m формула (2.2.3) остается справедливой для всей Ω.

В случае трех измерений показано [16], что при выполнении кинематического и динамического условий совместности поверхность σ оказывается характеристической для уравнения $\Box u_m = 0$, то есть если $\psi(x,y,t) = 0$ – уравнение поверхности σ, то ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 - \psi_t^2 = 0. \qquad (2.3.1)$$

И наоборот – если выполнено кинематическое условие совместности и поверхность σ – характеристическая для уравнения $\Box u_m = 0$, то отсюда будет следовать выполнение динамического условия совместности.

При обобщении на случай четырех измерений условий совместности, обеспечивающих справедливость формулы Грина (2.2.3) в применении к функции u_m, обладающей разрывом первых производных, можно ожидать, что поверхность σ ($\psi(x,y,z,t)=0$ – уравнение поверхности σ) разрыва производных будет также характеристической для уравнения $\Box u_m = 0$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 - \psi_t^2 = 0. \qquad (2.3.2)$$

Или же это можно постулировать также, как, например, это было сделано выше, когда условие динамической совместности оказалось следствием выполнения условия кинематической совместности и условия, что поверхность разрыва – характеристическая для уравнения Даламбера.

Выполнение условий совместности обеспечивает справедливость применения формулы Грина (2.2.3). При этом отдельные компоненты тензора спинового момента $S^{\alpha}_{mn} = u_m \partial^{\alpha} u_n - u_n \partial^{\alpha} u_m$ будут испытывать разрыв на поверхности σ, характеристической для уравнения $\Box u_m = 0$ (сами функции u_n, u_m на поверхности σ непрерывны).

Отсюда и следует, что некоторые компоненты вектора спина, вычисленные в областях $\Omega 1$ и $\Omega 2$ по отдельности, будут испытывать скачок или переворот спина при переходе через σ из $\Omega 1$ в $\Omega 2$, сохраняя значение соответствующей компоненты суммарного спина, взятой по всему объему, неизменной.

В случае плоского фронта ударной электромагнитной волны поверхность σ задается уравнением–

$$\psi(x,y,z,t) = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z = 0.$$

Подставляя это выражение в уравнение (I.2.3.2), получается соотношение для скорости распространения ω/k_i $(i=x,y,z)$ поверхности σ:

$$(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2 = \omega^2/c^2,$$

откуда следует, что фронт ударной волны распространяется со скоростью света в вакууме.

§ 4. Явление переворота вектора спина электромагнитного поля на фронте ударной волны.

Закон сохранения тензора спинового момента (2.I.4) самосогласованого электромагнитного поля

$$\partial_\alpha S^\alpha_{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\alpha (A_\mu \partial^\alpha A_\nu - A_\nu \partial^\alpha A_\mu) = 0$$

как уравнение нелинейной динамики релятивистски несжимаемой бесстолкновительной плазмы, справедливое и в общем случае при выборе калибровки (2.I.2), допускает корректное определение динамики самосогласованного поля в терминах разрывных обобщенных функций, описывающих формирование ударной электромагнитной волны.

Теорема о слабых разрывах утверждает, что сохранение спинового момента будет выполнено и в случае, когда разрывны первые производные $\partial_\nu A_\mu$ на поверхности разрыва Σ, если выполнены кинематическое и динамическое условия совместности, согласно которым скорость распространения поверхности разрыва v_k (фронт ударной волны) равна скорости света в вакууме $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$

$$v_k = -\partial_0 \Sigma / \partial_k \Sigma,$$

где $\Sigma = \Sigma(x,y,z,t) = 0$ – уравнение поверхности разрыва.

Закон сохранения тензора спинового момента обеспечивает при достаточно быстром убывании полей на бесконечности сохранение 6 интегралов

$$P_k = \int u_{[0} \partial^0 u_{k]}\, dx$$

и

$$S_i = \varepsilon_{ikl} \int \mathbf{u}_{[k}\partial^{0}\mathbf{u}_{l]}dx$$

где $\mathbf{S}$ – вектор спина самосогласованного электромагнитного поля, ε_{ikl} – антисимметричный тензор, интегрирование проводится по всему пространству R_3. 3 - векторы $\mathbf{P}$ - дипольная составляющая тензора спина и $\mathbf{S}$ – магнитная спиновая составляющая – характеризуют поляризационные свойства поля.

Скачки производных $\{\partial_{\nu}A_{\mu}\}$ на фронте ударной волны определяют скачки соответствующих компонент тензора спинового момента

$$\{S^{\lambda}_{\nu\mu}\} = A_{[\nu}\{\partial^{\lambda}A_{\mu]}\}. \qquad (2.4.I)$$

Отсюда можно определить и скачки плотности векторов спинового дипольного момента

$$\{\mathbf{P}_k\} = \{S^{0}_{0k}\} = A_{[0}\{\partial^{0}A_{k]}\} = A_0\{\partial^{0}A_k\} - A_k\{\partial^{0}A_0\}$$

и спинового магнитного момента

$$\{\mathbf{S}_i\} = \{S^{0}_{kl}\} = \varepsilon_{ikl}A_{[k}\{\partial^{0}A_{l]}\} = \varepsilon_{ikl}(A_k\{\partial^{0}A_l\} - A_l\{\partial^{0}A_k\}).$$

Скачки производных определяют также и скачки напряженности магнитного поля

$$\{\mathbf{H}_i\} = \varepsilon_{ikl}\{\partial_k A_l\}$$

и скачки напряженности электрического поля

$$\{\mathbf{E}_k\} = \{\partial_{[0}A_{k]}\} = -\{\partial_0 A_k\} - \{\partial_k A_0\}.$$

Поэтому скачки компонент тензора спинового момента согласно (2.4.I) можно выразить через скачки напряженностей электромагнитного поля. Для нахождения всех оставшихся скачков производных $\{\partial_{\nu}A_{\mu}\}$ необходимо написать соотношения для скачков на основе закона сохранения тензора спинового момента, что приводит к следующим уравнениям

$$\{S^{0}_{\mu\nu}\,\partial_{0}\Sigma + \partial_{k}\Sigma\,S^{k}_{\mu\nu}\} = 0$$

или, по определению скорости разрыва $v_k = -\partial_0\Sigma/\partial_k\Sigma$, -

$$\{S^0_{\mu\nu}\} = v_k\{S^k_{\mu\nu}\}. \qquad (2.4.2)$$

Уравнения (2.4.2) совместно с уравнениями (2.4.I) и соотношениями, связывающими скачки производных 4 - потенциала и напряженностей электромагнитного поля, образуют полную систему уравнений, позволяющую выразить скачки плотности векторов спинового дипольного и магнитного моментов через скачки напряженности электромагнитного поля, описывающих переворот векторов спина на фронте ударной волны.

С помощью соотношения $A_0^2 - A_k^2 = 1$ расписываются скачки производных 0 - компоненты 4 - потенциала

$$\{\partial_\alpha A_0\} = A_l\{\partial_\alpha A_l\}/A_0. \qquad (2.4.3)$$

§5. Спиновые ударные волны.

Ударные электромагнитные волны рассмотренного вида формируются на основе закона сохранения спинового момента самосогласованного электромагнитного поля, поэтому они представляют спиновые ударные волны. Переворот спина на фронте ударной волны описывается путем определения скачков плотностей векторов спинового дипольного и магнитного моментов через скачки напряженностей электромагнитного поля из уравнений для скачков (2.4.I-3)

$$\{S^\lambda_{\nu\mu}\} = A_{[\nu}\{\partial^\lambda A_{\mu]}\},$$

$$\{P_k\} = \{S^0_{0k}\} = A_{[0}\{\partial^0 A_{k]}\} = A_0\{\partial^0 A_k\} - A_k\{\partial^0 A_0\},$$

$$\{S_l\} = \{S^O_{kl}\} = \varepsilon_{ikl}A_{[k}\{\partial^O A_{l]}\} = \varepsilon_{ikl}(A_k\{\partial^O A_l\} - A_l\{\partial^O A_k\}),$$

$$\{H_l\} = \varepsilon_{ikl}\{\partial_k A_l\},$$

$$\{E_k\} = \{\partial_{[O}A_{k]}\} = -\{\partial_O A_k\} - \{\partial_k A_O\},$$

$$\{S^O_{\mu\nu}\} = v_k\{S^k_{\mu\nu}\},$$

$$\{\partial_\alpha A_O\} = A_l\{\partial_\alpha A_l\}/A_O.$$

Общее решение этой системы уравнений можно получить с помощью преобразования Лоренца из решения в системе координат, где $A_O = 1$, $A_k = 0$.

Рассмотрим ударную спиновую волну с плоским фронтом, распространяющимся в направлении оси ОХ со скоростью света $v_x = 1$, $v_y = v_z = 0$. В этом случае разрывны лишь производные по x и по t, как производные по нормали к поверхности разрыва. Поэтому скачки плотности вектора магнитного спинового момента равны нулю $\{S_l\} = 0$. Ненулевые скачки плотности вектора дипольного спинового момента определяются через скачки напряженности электрического поля

$$\{P_k\} = -\{E_k\}. \qquad (2.5.1)$$

При этом выполнены соотношения между скачками напряженностей электрического и магнитного поля

$$\{H_z\} = -\{E_y\}, \qquad (2.5.2)$$

$$\{H_y\} = \{E_z\},$$

$$\{H_x\} = 0.$$

Скачки векторов напряженности электрического и магнитного поля ортогональны друг другу

$$\{E\}\cdot\{H\} = \{E_x\}\{H_x\} + \{E_y\}\{H_y\} + \{E_z\}\{H_z\} = 0.$$

Из (2.5.I) следует, что скачки вектора спина и магнитного поля тоже поперечны

$$\{P\}\cdot\{H\} = 0.$$

При этом

$$\{P\} + \{E\} = 0. \qquad (2.5.3)$$

Таким образом, спиновые поляризационные свойства электромагнитного самосогласованного поля обеспечивают компенсацию скачка напряженности электрического поля $\{E\}$ на фронте ударной волны дипольным спиновым моментом $\{P\}$.

Это означает, что скачок электрического поля на фронте ударной волны не связан с каким - либо видом плотности электрического заряда.

Аналогичный вывод можно сделать и в отношении скачка напряженности магнитного поля, определяемого соотношениями (2.5.2) через скачки электрического поля: скачки напряженности магнитного поля на фронте ударной волны не связаны ни с какой плотностью электрического тока, а обусловлены скачками спинового момента электромагнитного поля.

Глава 3. Интегрируемые решения задач нелинейной электродинамики.

§I. Свойства пространственно-временной симметрии уравнений Власова-Максвелла и уравнений гидродинамики холодной плазмы.

Рассмотрим соотношение между кинетическим и гидродинамическим подходами с точки зрения свойств симметрии уравнений Власова- Максвелла и уравнений бесстолкновительной гидродинамики.

Система уравнений Власова - Максвелла допускает симметрию относительно операции пространственного отражения $\mathcal{P}_x$: $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$. Действительно, вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, импульс $\mathbf{p}$, векторный потенциал $\mathbf{A}$, оператор ∇, плотность тока $\mathbf{j}$ - все эти величины являются полярными векторами, инвариантными относительно операции пространственного отражения $\mathcal{P}_x$. Векторное произведение $\mathbf{Q} = [\mathbf{A}\times\mathbf{B}]$ полярных векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ является псевдовектором, меняющим под действием операции $\mathcal{P}_x$ свое направление на противоположное $\mathcal{P}_x\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q}\to -\mathbf{Q}$. Поэтому вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = [\nabla\times\mathbf{A}]$ - псевдовектор. Вместе с тем векторное произведение $[\mathbf{A}\times\mathbf{Q}]$ полярного вектора $\mathbf{A}$ на псевдовектор $\mathbf{Q}$ есть полярный вектор.

Инвариантность уравнений Власова - Максвелла относительно операции пространственного отражения $\mathcal{P}_x$ следует из того, что все векторные величины в этих уравнениях относятся либо к полярным векторам, либо представляют векторное произведение полярного вектора на псевдовектор: член $[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$ в уравнении Власова, а также $[\nabla\times\mathbf{H}]$ в уравнениях Максвелла. Аналогичным свойством симметрии относительно операции пространственного отражения обладают и уравнения гидродинамики.

Уравнения Власова - Максвелла симметричны также относительно операции обращения времени $\mathcal{T}$: $t\to -t$ совместно с операцией отражения в пространстве импульсов $\mathcal{P}_p$: $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$. При этом из уравнений Максвелла $[\nabla\times\mathbf{E}] = -\dfrac{1}{c}\,\partial_t\mathbf{H}$, $\mathbf{H} = [\nabla\times\mathbf{A}]$ следует, что векторный потенциал также должен изменить знак.

Симметрия уравнений Власова - Максвелла относительно комбинированной операции $\mathcal{P}_p\mathcal{T}$ означает, что если существует решение $f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$, то существует и решение $f(\mathbf{x},-\mathbf{p},-t)$. В силу линейности кинетического уравнения Власова любое решение можно представить в виде:

$$f_\alpha(x,p,t) = f_\alpha^+(x,p,t) + f_\alpha(x,p,t),$$

где

$$f_\alpha^+(x,p,t) = \frac{1}{2}\,[f_\alpha(x,p,t) + f_\alpha(x,-p,-t)]$$

– функция четная относительно операции

$$\mathcal{P}_p\mathcal{T}:\ f^+(x,p,t) = f^+(x,-p,-t),$$

$$f_\alpha^-(x,p,t) = \frac{1}{2}\,[f_\alpha(x,p,t) - f_\alpha(x,-p,-t)]$$

– нечетная функция: $f_\alpha^-(x,p,t) = -\,f_\alpha^-(x,-p,-t)$.

В стационарном случае $f_\alpha = f_\alpha(x,p)$, либо в случае, когда рассматриваемая задача инвариантна относительно операции обращения времени $\mathcal{T}$: $f_\alpha(x,p,t) = f_\alpha(x,p,-t)$, функции $f_\alpha^-(x,p,t)$ и $f_\alpha^+(x,p,t)$ оказываются соответственно антисимметричными и симметричными относительно операции отражения импульса $\mathcal{P}_p$: $p \mapsto -p$

$$f_\alpha^+(x,p,t) = f_\alpha^+(x,-p,t),$$

$$f_\alpha^-(x,p,t) = -\,f_\alpha^-(x,-p,t).$$

Функция распределения такого вида обнаруживает свойства, отсутствующие при гидродинамическом описании. Действительно, вычисляя моменты кинетического уравнения, имеем:

$$\mathcal{M}_0^{\alpha-} = n_\alpha^-(x,t) = \int f_\alpha^-(x,p,t)dp = 0,$$

$$\mathcal{M}_1^{\alpha-} = \int v f_\alpha^-(x,p,t)dp \neq 0,$$

$$\mathcal{M}_0^{\alpha+} = n_\alpha^+(x,t) = \int f_\alpha^+(x,p,t)dp \neq 0,$$

$$\mathcal{M}_1^{\alpha+} = \int v f_\alpha^+(x,p,t)dp = 0.$$

Таким образом общее решение распадается на две составляющие : одна из которых f_α^- соответствует потоку частиц нулевой плотности и нулевой температуры плотностью тока $j_\alpha^- = \mathcal{M}_1^{\alpha-} \neq 0$, а другая f_α^+ соответствует стационарному распределению неподвижных зарядов объемной плотностью n_α^+. Условие равновесия такого распределения-

$$\nabla \mathcal{P}_\alpha^+ = \mathbf{E}\, e_\alpha n_\alpha^+ .$$

В общем случае плотность тока j_α^- в силу уравнения непрерывности может зависеть от времени.

Соответствующее решение в рамках гидродинамического подхода может быть построено из двух различных решений, соответствующих двум противоположно направленным потокам $j_\alpha^1 = e_\alpha n_\alpha^1 V_\alpha$ и $j_\alpha^2 = -e_\alpha n_\alpha^2 V_\alpha$ неодинаковой плотности $n_\alpha^1 \neq n_\alpha^2$, если положить

$$j_\alpha^- = j_\alpha^1 + j_\alpha^2 = e_\alpha (n_\alpha^1 - n_\alpha^2) V_\alpha ,$$

$$n_\alpha^- = 0, \quad j_\alpha^+ = 0, \quad n_\alpha^+ = n_\alpha^1 + n_\alpha^2 .$$

Несмотря на формальное совпадение этих решений, имеется существенное различие, которое состоит в том, что обе составляющие решения f_α^+, f_α^- в рамках кинетического описания соответствуют одной и той же функции распределения $f_\alpha = f_\alpha^+ + f_\alpha^-$, тогда как при гидродинамическом описании данное решение образовано двумя различными потоками, соответствующими двум разным физическим состояниям (j_α^1, n_α^1) и (j_α^2, n_α^2). То есть при переходе от кинетического к гидродинамическому описанию в данном случае происходит нарушение симметрии уравнения Власова, в результате которого одно физическое состояние в рамках кинетического подхода расщепляется на два разных физических состояния при гидродинамическом подходе.

Еще более существенное различие между кинетическим и гидродинамическим описаниями бесстолкновительной плазмы проявляется в случае, когда функция распределения полностью антисимметрична относительно операции отражения импульса $\mathcal{P}_p$: $f_\alpha(x,p,t) = -f_\alpha(x,-p,t)$ и совпадает с составляющей $f_\alpha^-(x,p,t)$, обладающей нулевыми зарядовой плотностью $n_\alpha^- = 0$ и температурой, но ненулевой плотностью тока $j_\alpha^- \neq 0$. В рамках самосогласованной системы уравнений гидродинамического подхода таких решений не существует. Плотность тока j_α^- может быть включена в систему уравнений Максвелла только в виде стороннего тока.

Таким образом, уравнения Власова - Максвелла допускают более широкий класс источников самосогласованного электромагнитного поля, чем уравнения гидродинамики. Существенное различие между кинетическим и гиродинамическим подходами состоит в том, что система уравнений Власова - Максвелла, используемая при кинетическом описании, обладает более широкой группой симметрии, чем уравнения гидродинамики. Вследствие этого различия кинетическое описание допускает более широкий круг самосогласованных задач нелинейной электродинамики.

§2. Сводка известных решений уравнений самосогласованного поля.

Краткий обзор известных точных решений уравнений самогласованного электромагнитного поля проводится путем непосредственного обращения к уравнениям самосогласованного поля (I.3.2) или (I.3.3), эквивалентным исходным уравнениям гидродинамики. Уравнения (I.3.2) позволяют достаточно просто получить формальное решение этих задач, что облегчает задачу анализа граничных условий, определяющих существование рассматриваемых конфигураций заряженной плазмы.

Устойчивость таких конфигураций во многих случаях связана с необходимостью введения стороннего источника электромагнитного поля вида поверхностного тока или поверхностного заряда из-за наличия скачков напряженности поля на границах. Это нарушает самосогласованность задачи и может привести к неопределенности решения.

Разрешение этой проблемы можно видеть в двух направлениях. Во первых, - обратится к кинетическому описанию и включить упомянутые поверхностные заряды и токи в состав моментов одной функции распределения в соответствии со свойствами симметрии уравнений кинетического подхода; во- вторых, - рассматривать разрыв напряженности поля на границе как следствие воздействия ударной спиновой волны, скачки напряженности поля на фронте которой не связаны ни с какими поверхностными зарядами и токами, но определяются скачком плотности вектора спина самосогласованного поля. Преимущество второго подхода в том, что при этом нет необходимости выхода за рамки гидродинамического описания, вся задача полностью самосогласована и определена в рамках одного подхода. Отличие между этими подходами будет заключаться в различных значениях полного тока и заряда.

В силу инвариантности уравнений гидродинамики холодной плазмы относительно всех преобразований, использованных при выводе уравнений самосогласованного электромагнитного поля, последние могут быть записаны в произвольной системе координат. Выбирая систему координат в соответствие с симметрией рассматриваемой задачи можно получить частное решение. Предполагая, например, что в цилиндрической системе координат $\{r,\varphi,z\}$ движение в радиальном направлении отсутствует $u = \{0,\ u_\varphi,\ u_z\}$, причем все переменные зависят только от радиуса r, легко видеть, что уравнения самосогласованного поля

$$\partial_r(r^{-1}\partial_r(ru_\varphi)) = (u_\varphi/(\gamma r))\partial_r(r\partial_r\gamma),$$

$$r^{-1}\partial_r(r\partial_r u_z) = (u_z/(\gamma r))\partial_r(r\partial_r\gamma)$$

имеют простейшее решение

$$u_z/\gamma = \beta_0 = \mathrm{const}$$

– продольная компонента скорости потока частиц постоянна.

Потенциалы u самосогласованного поля удовлетворяют условию Лоренца тождественно

$$\partial_k u^k = r^{-1}\partial_r(ru_r) + \partial_z u_z + r^{-1}\partial_\varphi u_\varphi = 0.$$

Вместе с тем выполнение этого условия означает несжимаемость потока частиц, поскольку u – это и импульс потока частиц. Решение уравнений самосогласованного поля в виде

$$\gamma = \gamma_0 \mathrm{ch}\Phi,$$

$$u_\varphi = \gamma_0 \mathrm{sh}\Phi,$$

где $\gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{-1/2}$, сводится к решению одного уравнения

$$r^{-1}\partial(r\partial\phi) = \mathrm{sh}\phi\,\mathrm{ch}\phi/r^2.$$

Замена аргументов $\phi = \phi(\mu)$, $\mu = \ln(r/r_0)$ приводит это уравнение к виду уравнения

$$\partial_{\mu\mu}\phi = \mathrm{sh}\phi\,\mathrm{ch}\phi$$

разрешимого в элиптических функциях

$$\gamma = \gamma_0 C\ \mathrm{sn}(C^{1/2}\ln(r/r_0),\ k = \sqrt{(C-1)/C}).$$

Это решение совпадает с известным решением задачи [11] о транспортировке трубчатого релятивистского пучка электронов в продольном магнитном поле. Постановка и подробный анализ решения данной задачи проведен в работе [11].

Представление потенциалов электромагнитного поля с помощью величины ϕ широко используется в предлагаемом подходе решения самосогласованных задач нелинейной электродинамики. ϕ аналогична параметру, определяющему лоренцево вращение системы координат (буст), для которого в релятивистских теориях иногда используется термин "быстрота". Скорость v связана с быстротой соотношением $v = u/\gamma = \mathrm{th}(\phi)$ ($v \sim \phi$ при $\phi \ll 1$). Поэтому, чтобы не смешивать величину ϕ со скалярным потенциалом электрического поля φ, ниже для ϕ используется название "быстрота".

Система уравнений (I.3.3) может быть использована в задачах по магнитной изоляции пучков заряженных частиц. Покажем это на примере следующей задачи. Рассмотрим релятивистский поток электронов, заполняющий все пространство между двумя плоскими бесконечно протяженными электродами, между которыми приложена разность потенциалов U. Расстояние между электродами d. Параллельно плоскости электродов приложено магнитное поле, ориентированное в направлении оси OZ. Ось OX направлена поперек межэлектродного зазора от катода к аноду. Ось OY параллельна плоскости электродов и ориентирована таким образом, чтобы образовать правую систему координат XYZ.

Начало координат поместим в плоскости катода. Величина напряженности магнитного поля на катоде - H_c, на аноде - H_o. $H_o > H_c$, из-за диамагнетизма пучка. Магнитное поле может быть создано сторонним источником тока I_o, протекающим по поверхности катода. Поток электронов неоднороден поперек зазора и однороден вдоль электродов. Токовая скорость электронов в общем случае может быть направлена произвольным образом, как параллельно пластинам, так и поперек межэлектродного зазора.

В такой постановке все переменные будут зависеть только от координаты x и времени t. Прямой подстановкой в уравнения (I.3.3) нетрудно проверить, что существует решение этой задачи следующего вида:

$$\gamma = \gamma \mathrm{ch}(\mu x), \qquad H_x = H_y = 0, \qquad (3.2.I)$$

$$u_x = (\gamma_o^2-1)^{1/2}\sin(\mu t), \qquad H_z = \mu\gamma_o \mathrm{ch}(\mu x),$$

$$u_y = \gamma_o \mathrm{sh}(\mu x), \qquad E_z = \mu(\gamma_o^2-1)^{1/2}\sin(\mu t),$$

$$u_z = (\gamma_o^2-1)^{1/2}\cos(\mu t), \quad E_x = -\mu\gamma \mathrm{sh}(\mu x) - \mu(\gamma_o^2-1)^{1/2}\cos(\mu t),$$

$$E_y = 0,$$

μ и γ - постоянные, подлежащие определению из граничных условий:

на катоде (x=0) - $\gamma = \gamma_o$, $H_z = \mu\gamma_o = H_c$, $E_x = 0$;

на аноде (x=d) - $\gamma = \gamma_a = \gamma_o \mathrm{ch}\mu d$, $H_z = \mu\gamma_a = H_o$.

Отсюда

$$\mu = d^{-1}\ln(\gamma_a/\gamma_o + (\gamma_a^2/\gamma_o^2-1)^{1/2}) = H_o/\gamma_a,$$

где $\gamma_a = \gamma_o/\mathrm{ch}(dH/\gamma_o)$.

Решение (3.2.I) удовлетворяет условию Лоренца для потенциала электромагнитного поля и условию релятивистской несжимаемости. В данном случае инвариантная плотность заряда $\rho_e^o = -4\pi\mu^2$ постоянна. В системе единиц e = m = c =1

$$H_o = \mu\gamma_a\ 1{,}7\ (10^3\ \mathrm{A}),\ \gamma_a - \gamma_o = U/0.511,\ [U] = \mathrm{MB},$$

$$\mu = H_0/(1.7\gamma_a), \qquad [d] = \text{см}.$$

Более общее решение можно получить преобразованием Лоренца $t \to \omega t - ky$, где $\omega/c = \sqrt{\mu^2+k^2}$. Такое решение уравнений самосогласованного поля, где $\mu^2 = |\rho_e|/(4\pi)$ определяется зарядовой плотностью частиц, будет соответствовать взаимодействию пучка и ленгмюровской волны, распространяющейся в направлении оси OY, характеризуемой дисперсией $\omega = \omega(k)$ данного вида.

Полный ток в направлении оси OY на единицу длины электрода

$$I_y = I_A \int \rho_e \beta_y dx = I_A/(4\pi)(\gamma_a/d)\ln(\gamma_a/\gamma_0 + (\gamma_a^2/\gamma_0^2-1)^{1/2})(1-\gamma_0/\gamma_a).$$

Поперек зазора протекает ток плотностью

$$j_x = (I_A/(4\pi))(\gamma_0^2-1)^{1/2}\sin(\mu t),$$

осциллирующий во времени с ларморовской частотой $\omega_0 = \mu c$. Амплитуда этого тока пропорциональна

$$(\gamma_0^2-1)^{1/2} = (\gamma_a^2/\text{ch}^2(dH_0/(1.7\gamma_a))-1)^{1/2}$$

и определена, если подкоренное выражение не отрицательно. Отсюда следует, что существует критическое значение напряженности магнитного поля при $\gamma_0 = 1$

$$H_0^{из} = (1.7\gamma_a/d)\ln(\gamma_a + (\gamma_a^2-1)^{1/2}) \text{ кЭ}$$

при котором амплитуда осцилляций тока j_x поперек поверхности электродов обращается в нуль и движение электронов происходит только в направлении оси OY без пересечения с поверхностью электродов. Поэтому полный ток

$$I_y = I_A/(4\pi)(H_0^{из}/1.7)(1-1/\gamma_a) \leqslant I_A/(4\pi)(H_0^{из}/1.7)$$

ограничен величиной критической напряженности магнитного поля $H_0^{из}$, обеспечивающей, таким образом, магнитную изоляцию потока электронов.

Решение (3.2.I) характеризуется ненулевыми компонентами плотности вектора спина магнитной $S_i = \varepsilon_{ikl} S^0_{kl}$ и дипольной электрической $D_l = S^0_{0l}$ образующих тензора спина $S^0_{\mu\nu} = u_{[\mu}\,\partial^0 u_{\nu]}$:

$$S_y = \mu(\gamma_0^2-1),$$

$$S_x = -\mu\gamma_0(\gamma_0^2-1)^{1/2}\mathrm{sh}(\mu x)\sin(\mu t),$$

$$S_z = -\mu\gamma_0(\gamma_0^2-1)^{1/2}\mathrm{sh}(\mu x)\cos(\mu t),$$

$$D_x = \mu\gamma_0(\gamma_0^2-1)^{1/2}\mathrm{ch}(\mu x)\cos(\mu t),$$

$$D_y = 0,$$

$$D_z = \mu\gamma_0(\gamma_0^2-1)^{1/2}\mathrm{ch}(\mu x)\sin(\mu t).$$

В данной системе спин не обязательно должен сохраняться во времени, поскольку на границе области поле не обращается в нуль. Этому удовлетворяет лишь компонента S_y. При достижении магнитной изоляции, когда $\gamma_0 = 1$ все компоненты спина обращаются в нуль.

Таким образом, при подаче на электроды постоянной разности потенциалов между пластинами возникает осциллирующий во времени ток, создающий поляризационный эффект, характеризуемый ненулевыми компонентами электрической и магнитной образующих спинового момента самосогласованного поля, осциллирующими во времени с частотой осцилляций поперечного тока. При магнитной изоляции все поляризационные эффекты отсутствуют.

Расписывая уравнения (I.3.2) в системе сферических координат, нетрудно получить частное решение вида $u = \{u_r, 0, 0\}$ где $u_r = u(\vartheta)$. В этом случае уравнение для радиальной компоненты импульса u_r

$$\frac{1}{(r^2\sin\vartheta)}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta u) = \frac{u}{(r^2\sin^2\vartheta)}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\gamma)$$

с помощью представления $u = \mathrm{sh}\phi$, $\gamma = \mathrm{ch}\phi$ приводится к виду

$$\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\phi) = 0.$$

Общее решение этого уравнения, совпадающее с решением [12], -

$$\phi = A\ln|\mathrm{tg}(\vartheta/2)| + B, \qquad (3.2.2)$$

A, B - постоянные, которые определяются из граничных условий. Электрическое поле имеет только ϑ - компоненту

$$E_\vartheta = A\mathrm{sh}\phi/(r\sin\vartheta), \qquad (3.2.3)$$

магнитное поле - φ - компоненту

$$H_\varphi = -A\mathrm{ch}\phi/(r\sin\vartheta). \qquad (3.2.4)$$

Нетрудно проверить, что данное решение соответствует бессиловой конфигурации заряженной плазмы, поскольку ϑ - компонента силы Лоренца

$$E + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}] = -\partial_\vartheta\gamma/r + \beta\partial_\vartheta u/r = (-\partial_\vartheta\gamma + (u/\gamma)\partial_\vartheta u)/r = -(\gamma\partial_\vartheta\gamma-$$

$$-u\partial_\vartheta u))/(r\gamma) = -\partial_\vartheta(\gamma^2 - u^2)/(2r\gamma) = 0$$

в силу связи $\gamma^2 - u^2 = 1$. Остальные компоненты равны нулю тождественно.

Движение электронов происходит в радиальном направлении по экипотенциальным (γ = const) коническим поверхностям ϑ = const.

Это решение может быть использовано в задаче о магнитной изоляции конической передающей линии при следующей постановке. Поток электронов заключен в пространстве между двумя коническими электродами $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \vartheta_2$, между которыми приложена постоянная разность потенциалов U. На отрицательно заряженном электроде - катоде ($\vartheta = \vartheta_1$, $\gamma = 1$) напряженность электрического поля равна нулю, также как и при магнитной самоизоляции в плоской геометрии электродов. Электрическое поле на положительно заряженном электроде - аноде ($\vartheta = \vartheta_2$, $\gamma = \gamma_a$) не фиксировано. Со стороны катода приложено постоянное магнитное поле $H_\varphi(\vartheta = \vartheta_1) = H_0$, которое может быть создано сторонним током I_0, протекающим по поверхности катода или же определяется скачком спина в ударной волне, не связанным ни с каким током.

Граничные условия на катоде:

$$\gamma(\vartheta_1) = \mathrm{ch}(A\ln|\mathrm{tg}(\vartheta_1/2)| + B) = 1,$$

$$\gamma(\vartheta_2) = \mathrm{ch}(A\ln|\mathrm{tg}(\vartheta_2/2)| + B) = \gamma_a.$$

Откуда

$$B = -A\ln|\mathrm{tg}(\vartheta_1/2)|,$$

$$A = \ln(\gamma_a + \sqrt{\gamma_a^2 - 1})/\ln|\mathrm{tg}(\vartheta_2/2)/\mathrm{tg}(\vartheta_1/2)|.$$

Электронный ток, протекающий через участок сферической поверхности между коническими электродами $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \vartheta_2$ находится из уравнений Максвелла

$$I_e = \int j_r dS = \int_0^{2} d\varphi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta\; j_r r^2 \sin\vartheta,$$

где

$$j_r = (c/4\pi)[\nabla[\nabla\times\mathbf{u}]]_r = -(mc^3/e)\frac{1}{4\pi r^2 \sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta u).$$

Отсюда

$$I_e = -(mc^3/2e)(\gamma_a - 1)\ln(\gamma_a + \sqrt{\gamma_a^2 - 1})/\ln|\mathrm{tg}(\vartheta_2/2)/\mathrm{tg}(\vartheta_1/2)|. \tag{3.2.5}$$

Это выражение отличается от соответствующей величины электронного тока между плоскими электродами только геометрическим фактором.

Для существования конической бессиловой конфигурации, также как и в случае плоской геометрии электродов, необходимо наличие магнитного поля H_0, которое может быть создано сторонним током, протекающим по поверхности катода $\vartheta = \vartheta_1$. Это магнитное поле может определяться также за счет скачка спина на фронте ударной волны не связанного ни с каким током.

Плотность стороннего тока можно представить в виде

$$j_r^0 = \langle j_r^0\rangle\delta(\vartheta - \vartheta).$$

Величина стороннего тока

$$I_0 = \int d\vartheta dr^2\sin\vartheta j_r^0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int d\vartheta r^2\sin\vartheta\langle j_r^0\rangle\delta(\vartheta - \vartheta_1) =$$

$$= 2\pi r^2\sin\vartheta_1\langle j_r\rangle$$

Откуда $\langle j_r^0\rangle = I_0/(2\pi r^2\sin\vartheta_1)$.

Напряженность магнитного поля на катоде $H_0 = 2I_0/(rc)$. С другой стороны, согласно (3.2.4)

$$H_\varphi^0 = mc^2/(er\sin\vartheta_1)A$$

Отсюда, приравнивая $H_\varphi^0 = H_0$, следует

$$I_0 = Amc^3/(2e) = (mc^3/2e)\ln(\gamma_a + \sqrt{\gamma_a^2 - 1})/\ln|tg(\vartheta_2/2)/tg(\vartheta_1/2)|.$$

Суммарный ток, протекающий в линии,

$$I = I_e + I_0 = (mc^3/2e)\gamma_a\ln(\gamma_a + \sqrt{\gamma_a^2 - 1})/\ln|tg(\vartheta_2/2)/tg(\vartheta_1/2)|. \quad (3.2.6)$$

Таким образом показано, что для существования бессиловой конфигурации и обеспечения магнитной изоляции конической линии необходимо присутствие стороннего тока $I_0 = I_e/\gamma_a$, протекающего по поверхности катода.

Введение стороннего тока I_0 самосогласованным образом можно обеспечить путем обращения к кинетическому описанию. При этом сторонний ток рассматривается как часть полного тока I электронов данной бессиловой конфигурации. В силу самосогласованности задачи можно утверждать, что в данном случае реализуется магнитная самоизоляция потока электронов.

Вместе с тем магнитное поле на катоде, необходимое для существования бессиловой конфигурации, может быть обусловлено и скачком спина на фронте ударной волны, не связанной ни с каким токами. Полный ток в этом случае будет определяться по формуле (3.2.5), соответствующей закону "3/2" в нерелятивистском пределе, а не (3.2.6).

При увеличении тока для обеспечения магнитной самоизоляции необходимо предполагать отрыв потока электронов от катода или анода и соответствующее изменение граничных условий.

В предельном случае $\vartheta_2 = \pi/2$ конус $\vartheta = \vartheta_2$ вырождается в плоскость. Такая бессиловая конфигурация с коническим катодом $\vartheta = \vartheta_1$, напряженность электрического поля на котором равна нулю, и плоским анодом ($\vartheta_2 = \pi/2$) соответствует задаче о релятивистском диоде с бесконечной эмиссионной способностью катода. Полный ток такого диода согласно формуле (3.2.6) равен

$$I = (mc^3/2e)\gamma_a \ln(\gamma_a + \sqrt{\gamma_a^2 - 1})/\ln|ctg(\vartheta_1/2)|,$$

где $\gamma_a = 1 + U/0.511$, U – напряжение между электродами МВ.

При $\vartheta_1 \approx \pi/2$ когда отношение радиуса катода R к величине межэлектродного зазора d велико $R/d \gg 1$, это выражение

$$I = (mc^3/e)\,\frac{R}{(2d)}\,\gamma_a \ln(\gamma_a + \sqrt{\gamma_a^2 - 1}) \qquad (3.2.7)$$

соответствует парапотенциальной модели релятивистского диода [13]. В случае, когда магнитное поле на катоде обусловлено скачком спина самосогласованного поля ударной электромагнитной волны, полный ток диода будет определяться по другой формуле-

$$I = (mc^3/e)\,\frac{R}{(2d)}\,(\gamma_a - 1)\ln(\gamma_a + \sqrt{\gamma_a^2 - 1}), \qquad (3.2.8)$$

соответствующей теории сильноточного диода большого радиуса [18].

В работе [19] зависимость (3.2.8) получила экспериментальное подтверждение.

§3. Свойства конформной симметрии уравнений самосогласованного поля.

Свойства конформной симметрии уравнений Максвелла в пространстве трех измерений, такие как инвариантность уравнения Лапласа в относительно инверсии (теорема Кельвина), хорошо известны и широко примененяются при решении задач электро - и магнитостатики методом конформных отображений.

Уравнения Максвелла в пространстве четырех измерений, как известно ([8], стр.I2) ,помимо инвариантности относительно преобразований I0- параметрической группы Лоренца обладают также свойством инвариантности относительно I5 - параметрической группы конформных преобразований связности пространства Минковского. Конформное преобразование отображает риманово пространство с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ в риманово пространство с метрическим тензором $g'_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\exp(-2\sigma(x)) \qquad (3.3.I)$$

при этом вектор электромагнитного поля - $A_\mu(x) = A_\mu(x')$. Уравнения самосогласованного поля (I.3.2) конформно инвариантны, поскольку плотность заряда в силу самосогласованности задачи выражается квадратичным по производным поля выражением (I.3.6).

Физически конформная инвариантность означает, что в теории отсутствует какая- либо величина размерности длины, например комптоновская длина $\hbar/mc$ квантовой частицы массы m. В случае кванта электромагнитного поля нулевой массы в теории отсутствует масштаб длины и поэтому она должна быть конформно инвариантна.

При фиксации инвариантной объемной плотности заряда конформная инвариантность уравнений Максвелла нарушается. Но, согласно [20] стр. 590, и в этом случае сохраняется инвариантность относительно алгебры трехмерной конформной группы конформных преобразовании трехмерного пространства, к которым относится и преобразование, задаваемое стереографической проекцией сферы на плоскость.

Используя эти свойства инвариантности, нетрудно по одному решению получить ряд других решений уравнений самосогласованного поля при условии задания соответствующих граничных условий.

Свойство конформной инвариантности уравнений самосогласованного поля позволяет по известным решениям в плоском пространстве Минковского определить решения этих уравнений в конформно - эвклидовом пространстве, характеризуемом ненулевой кривизной. То есть получить решения, описывающие самосогласованную динамику бесстолкновительной плазмы во внешнем гравитационном поле.

В случае однородного изотропного простанства - времени ([8], стр.209-210) метрика задается следующим выражением

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2, \qquad (3.3.2)$$

где

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2)$$

- метрика 3 - пространства постоянной кривизны $æ = -1, 0, 1$; $f(r) =$ shr, r, sinr соответственно, $a(t)$ - радиус кривизны в момент времени t.

При $æ = -1$ 3 - пространство открытое, обладающее метрикой Лобаческого, при $æ = 0$ 3 - пространство плоское, при $æ = 1$ 3- пространство закрытое $0 < r < \pi$.

Энергия поля определяется как

$$H(\eta) = a^2 \int_{\eta=const} d^3x \sqrt{\gamma} T^{(0)}_{00}. \qquad (3.3.3)$$

Интегрирование проводится по поверхности $\eta = const$ ($\eta = \int dt/a(t)$ - конформное время), $T^{(0)}_{00}$ - тензор энергии импульса. Аналогично определяется и полный заряд системы.

Подставляя в (3.3.3) статическое решение уравнений самосогласованного поля для случая пространства Минковского нулевой кривизны, на основе конформной инвариантности можно вычислить интегральную энергию соответствующей плазменной конфигурации в постранстве с ненулевой кривизной.

§4. Аналогия уравнений самосогласованного поля и уравнений сверхпроводимости.

Уравнения самосогласованного электромагнитного поля (I.3.4), сформулированные на основе уравнений гидродинамики холодной бесстолкновительной плазмы, по своему виду в нерелятивистском приближении аналогичны феноменологическим уравнениям Лондона для сверхпроводников [10], поскольку плотность тока пропорциональна 3- вектору- потенциалу самосогласованного электромагнитного поля, совпадающему с точностью до калибровочного преобразования с вектором $\mathbf{u}_k$ импульса жидкости. Идентичность уравнений самосогласованного поля в нерелятивистском пределе и уравнений Лондона достигается в случае, когда зарядовая плотность постоянна. Но тогда выполнено условие несжимаемости, обеспечивающее сохранение спинового момента электромагнитного поля, которое можно рассматривать как классическое. При таком сопоставлении зарядовая плотность частиц должна соответствовать зарядовой плотности куперовских пар электронов, находящихся в сверхпроводящем состоянии. При сверхпроводимости спаривание двух электронов в бозонное состояние с целочисленным спином осуществляется за счет спинового взаимодействия. Сохранение спина самосогласованного поля в данном случае обеспечивает условия совместности уравнений поля. Поэтому уравнения самосогласованного поля с учетом приведенных соображений могут быть рассмотрены в качестве аналога релятивистского обобщения уравнений Лондона для сверхпроводников. Решение уравнений самосогласованного поля (3.2. I), использованное в задаче о магнитной изоляции электронов в плоской геометрии, описывает эффект возникновения осциллирующего во времени тока при подаче постоянного напряжения между плоскими электродами аналогичный эффекту Джозефсона для сверхпроводящего контакта. Сам по себе эффект магнитной изоляции, устанавливающий критическое значение магнитного поля при котором прекращаются утечки тока между электродами и исчезают все поляризационные спиновые эффекты самосогласованного поля, продолжает аналогию со свойствами сверхпроводников, поскольку магнитное поле и в этом случае характеризуется критическим значением напряженности, при котором сверхпроводимость отсутствует.

Релятивистские уравнения самосогласованного поля в случае, когда плотность заряда постоянна, можно рассматривать как уравнения свободного векторного поля ненулевой массы $m \sim |\rho_e|^{1/2}$. Наличие ненулевой массы нарушает конформную и масштабную инвариантность поскольку появляется определенный масштаб длины.

Глава 4. Бессиловые конфигурации заряженной плазмы.

§I. Бессиловые конфигурации бесстолкновительной плазмы.

Среди самосогласованных задач нелинейной электродинамики можно выделить класс задач, отвечающих бессиловым конфигурациям заряженных частиц. Движение заряженных частиц при этом происходит свободно, таким образом, что сумма всех сил, действующих на частицу равна нулю $dp_\alpha dt = 0$, и не зависит от заряда частицы.

Такие конфигурации соответствуют установившемуся движению всей совокупности частиц как целого. Бессиловой конфигурации соответствует предельный случай магнитной самоизоляции потока электронов, а также большая часть задач, рассмотренных выше. Движение электронов в этом случае представляет электрический дрейф в скрещенных полях, электрическом и магнитном. Необходимым условием существования таких бессиловых конфигураций является наличие стороннего тока, протекающего по граничной поверхности. Введение такого стороннего тока самосогласованным образом можно осуществить лишь в рамках кинетического описания. В рамках же гидродинамического подхода можно лишь говорить о необходимости задания специфических граничных условий, обеспечивающих существование бесиловой конфигурации.

Задание граничных условий такого вида предполагает наличие сторонних источников электромагнитного поля и потому приводит к нарушению самосогласованности задачи. Полностью самосогласованная постановка таких задач при полном отсутствии внешних полей и токов, возможна только путем обращения к кинетическому описанию или учету спина.

В случае инвариантности задачи относительно операции обращения времени $t \to -t$, с точки зрения кинетики частицы каждого сорта α разбиваются на две группы: холодный поток частиц, характеризуемый нулевой температурой и плотностью частиц $n_\alpha = 0$ и ненулевой плотностью тока $\mathbf{j}_\alpha \neq 0$, и – неподвижный фон заряженных частиц плотностью заряда $e_\alpha n_\alpha^0$, характеризуемый общем случае ненулевой температурой T_α^0.

Неподвижный фон заряженных частиц формирует стационарное распределение потенциала ϕ самосогласованного поля

$$\Box\phi = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha^0. \qquad (4.I.I)$$

Условие равновесия частиц этой группы

$$\partial_m \mathcal{P}^\alpha_{ki} - e_\alpha n_\alpha \mathbf{E}_m = 0, \qquad (4.I.2)$$

$\mathcal{P}^\alpha_{ki}$ – тензор давления.

Движение другой группы частиц бессиловой конфигурации происходит с одинаковой макроскопической скоростью $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}$ и удовлетворяет уравнению

$$dp/dt = 0 \qquad (4.I.3)$$

и условию обращения в нуль силы Лоренца

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}] = 0. \qquad (4.I.4)$$

Уравнения Максвелла для компонент векторного потенциала $\mathbf{A}$

$$\Box\mathbf{A} = (4\pi/c)\sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha. \qquad (4.I.5)$$

При этом условие Лоренца переходит в условие, соответствующее кулоновской калибровке

$$(\nabla\mathbf{A}) = 0. \qquad (4.I.6)$$

В общем случае $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$, T_α^0 могут зависеть от времени. Переходя от полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ к потенциалам ϕ, $\mathbf{A}$ и используя калибровочную инвариантность уравнений Максвелла относительно градиентных преобразований, согласно подходу, излагаемому выше, можно показать, что система уравнений (4.I.3 – 4) допускает два решения $\mathbf{p} = (e/c)\mathbf{A}$ и $\mathbf{p} =$

$-(e/c)\mathbf{A}$, причем $\mathbf{p}$ удовлетворяет уравнению (4.I.3)

$$\partial_t \mathbf{p} + (\mathbf{V}\,\nabla)\mathbf{p} = 0, \qquad (4.I.7)$$

эквивалентному уравнению (4.I.4)

$$\nabla\gamma + \partial_t \mathbf{p} = \frac{1}{\gamma}\,[\mathbf{p}\times[\nabla\times\mathbf{p}]]. \qquad (4.I.8)$$

Два решения уравнений (4.I.3) соответствуют двум потокам частиц, движущимся с одинаковыми макроскопическими скоростями навстречу друг другу. Поэтому формально можно представить плотность тока в виде

$$\mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \mathbf{V}(n^1_\alpha - n^2_\alpha) \qquad (4.I.9)$$

$(\mathbf{V} = e\mathbf{A}/(mc\gamma))$, где n^1_α и n^2_α формально соответствуют плотности частиц движущихся со соростью $\mathbf{V}$ и $-\mathbf{V}$ соответственно. Такое представление (4.I.9) приводит к некоторой неопределенности в физической трактовке решения в силу независимости движения частиц в бессиловых конфигурациях от заряда частиц. А именно, в случае, когда имеются частицы как положительного, так и отрицательного заряда, движение частиц отрицательного заряда со скоростью $\mathbf{V}$ неотличимо от движения частиц положительного заряда со скоростью $-\mathbf{V}$, и наоборот.

Возможны два способа решения системы уравнений (4.I.I,5,9). В первом случае задано распределение плотности заряда фона неподвижных частиц $\sum_\alpha e_\alpha n^0_\alpha$ и распределение плотности тока $\mathbf{j}$ (4.I.9). Тогда из уравнений (4.I.I,5) находится распределение потенциалов ϕ, $\mathbf{A}$ самосогласованного поля и макроскопическая скорость частиц $\mathbf{V}$. Во втором случае задано распределение потенциалов ϕ, $\mathbf{A}$ и скорости $\mathbf{V}$ и из уравнений (4.I.I,5) находится плотность тока $\mathbf{j} = \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha$, плотность заряда фона неподвижных частиц $\sum_\alpha e_\alpha n^0_\alpha$ и тензор давления P^α_{ik}. При использовании второго способа возникает неопределенность. Детальное распределение заряда по компонентам α можно найти лишь зная функцию распределения $f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$.

§2. Теорема о бессиловых конфигурациях.

Система уравнений, описывающая бессиловую конфигурацию, как система квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью вида

$$\sum_{k=1}^{3} p_k \partial_k p_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \qquad (4.2.\mathrm{I})$$

эквивалентна системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{ds} = p_k, \quad \frac{dp_k}{ds} = 0 \quad (k = 1,2,3). \qquad (4.2.2)$$

Эта теорема следует из более общей теоремы ([15], стр.I46 - I48) о системе квазилинейных уравнений (m - неизвестных, n - независимых уравнений) с одинаковой главной частью:

Система квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = b_i \quad (i=1,2,..,m) \qquad (4.2.3)$$

эквивалентна одному линейному дифференциальному уравнению для функции m + n независимых переменных.

Доказательство теоремы [15]: пусть задана система решений $\phi_1,\phi_2,...,\phi_m$ зависящая от параметров $C_1,C_2,...,C_m$

$$\phi_1(x_1,x_2,..,x_n,u_1,u_2,..u_m) = C_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4.2.4)$$

$$\phi_m(x_1,x_2,..,x_n,u_1,u_2,..,u_m) = C_m,$$

для которой можно неявным образом определить $u_1,u_2,..,u_m$ так, что якобиан $\partial(\phi_1,\phi_2,..,\phi_m)/\partial(u_1,u_2,..,u_m)$ всюду отличен от нуля.

Дифференцируя уравнения (4.2.4), получаем

$$\frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0.$$

Умножая на $a_\varkappa$ и суммируя по $\varkappa$, получаем

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u_\lambda} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0.$$

Следовательно, из (4.2.3) -

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\varkappa} + b_\lambda \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} = 0. \qquad (4.2.5)$$

Поэтому все функции ϕ_μ удовлетворяют одному линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} a_\varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial u_\lambda} = 0 \qquad (4.2.6)$$

тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_m$.
Если обозначить $b_\lambda = a_{n+\lambda}$, $u_\lambda = x_{n+\lambda}$, $r = m + n$, то это уравнение переходит в уравнение

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} a_\varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial x_\varkappa} = 0. \qquad (4.2.7)$$

Обратно, пусть даны m решений $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ уравнения (4.2.7) и пусть якобиан $\partial(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)/\partial(x_{n+1}, \ldots x_r) \neq 0$. Покажем, что функции $u_1, u_2, \ldots, u_m$, полученные из уравнения

$$\phi_\mu(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = C_\mu,$$

удовлетворяют системе (4.2.3). Снова дифференцированием получаем

$$\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0.$$

Умножая на $a_\varkappa$ и суммируя по $\varkappa$, используя (4.2.5), -

$$\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u_\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{m} a_\varkappa \frac{\partial \Phi_\mu \partial u_\lambda}{\partial u_\lambda \partial x_\varkappa}$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u_\lambda}(b_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa}) = 0.$$

Так как определитель, составленный из $\partial \Phi_\mu / \partial u_\lambda$ не равен нулю, то справедливы уравнения

$$b_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} = 0,$$

то есть u_λ удовлетворяют системе (4.2.3). Доказательство закончено.

Интегрирование линейного уравнения (4.2.7) эквивалентно интегрированию характеристичекой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\varkappa}{ds} = a_\varkappa, \quad \frac{du_\lambda}{ds} = b_\lambda \quad (\varkappa = 1,2,..,n; \; \lambda = 1,2,..,m) \qquad (4.2.8)$$

В случае $\varkappa = \lambda$, $p_\lambda = u_\lambda$, $a_\varkappa = p_\varkappa$, $b_\lambda = 0$ система (4.2.3) квазилинейных уравнений сводится к уравнениям бессиловой конфигурации (4.2.I). Поэтому решение последней сводится к интегрированию характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\varkappa}{ds} = p_\varkappa, \quad \frac{dp_\lambda}{ds} = 0, \qquad (4.2.9)$$

что дает $p_\lambda = \text{const}$, $x_\varkappa - x_\varkappa(0) = p_\varkappa$, или

$$p_\varkappa / p_{\varkappa'} = (x_\varkappa - x_\varkappa(0))/(x_{\varkappa'} - x_{\varkappa'}(0)). \qquad (4.2.10)$$

То есть функции p_λ должны зависеть только от отношений

$$\frac{x_l - x_l(0)}{\sqrt{(x_1 - x_1(0))^2 + (x_2 - x_2(0))^2 + (x_3 - x_3(0))^2}} \qquad (4.2.11)$$

и число независимых переменных уменьшается на единицу. При $n = 3$ – две независимые переменные, определяющие угловую зависимость $p_l = p_l(\phi, \vartheta)$. В случае бессиловой конфигурации цилиндрической симметрии уравнение (4.2.I) соответствует двумерному уравнению

$$\left(p_r\frac{\partial}{\partial r} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)p = 0 \qquad (4.2.12)$$

относительно переменных r и z. По теореме о бессиловых конфигурациях решение (4.2.I2) должно удовлетворять соотношению

$$p_r/p_z = (r - r_0)/(z - z_0), \qquad (4.2.13)$$

то есть

$$p_z = p\,\frac{(z - z_0)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + (r - r_0)^2}},$$

$$p_r = p\,\frac{(r - r_0)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + (r - r_0)^2}},$$

где функция $p = p\{(r-r_0)/(z-z_0)\}$. Если $r_0 \neq 0$, то это приводит к вырождению фокуса лучей $p_r/p_z = \mathrm{const}$ в окружность радиуса r_0.

В указанных случаях бессиловых конфигураций решение нелинейных уравнений самосогласованного поля приводит к краевой задаче для двумерного линейного уравнения Лапласа.

Данная теорема устанавливает вид "безвихревых" бессиловых конфигураций. Их всего две разновидности: бессиловые конфигурации центральной и осевой симметрии. Случай вырождения фокуса лучей в окружность рассматривается отдельно.

Все остальные бессиловые конфигурации образуют разновидность вихревых течений, удовлетворяющих уравнению $\mathrm{rot}\,p = \alpha p$, где α некоторая неопределенная функция координат.

§3. Бессиловая конфигурация центральной симметрии. Краевая задача.

Уравнения самосогласованного электромагнитного поля в калибровке Дирака $\varphi^2 - \mathbf{A}^2 = 1$ сводятся к одному уравнению относительно векторного потенциала $\mathbf{A} = \mathbf{p}$

$$-[\nabla\times[\nabla\times\mathbf{p}] = \mathbf{p}\,\nabla^2\gamma/\gamma \qquad (4.3.I)$$

где скалярный потенциал $\varphi = \gamma + \mathrm{const}$, $\gamma^2 = 1 + \mathbf{p}^2$. В сферической системе координат $\mathbf{x} = \{r,\vartheta,\varphi\}$ бессиловой конфигурации центральной симметрии будет соответствовать $\mathbf{p} = \{p_r, 0, 0\}$, где согласно теореме о бесиловых конфигурациях радиальная компонента импульса частиц $p_r = p_r(\vartheta,\varphi)$ должна зависеть только от углов ϑ и φ. В этом случае с помощью подстановки $\gamma = \mathrm{ch}(\phi)$, $p_r = \mathrm{sh}(\phi)$ нетрудно убедиться, что уравнение (4.3.I) будет выполнено, если функция $\phi(\vartheta,\varphi)$ - быстрота удовлетворяет уравнению Лапласа

$$r^{-2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}(\sin\vartheta\phi_{,\vartheta})_{,\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\phi_{,\varphi,\varphi}\right] = 0 \qquad (4.3.2)$$

С помощью замены переменных $\vartheta\to y=\mathrm{ctg}\vartheta$, $\varphi\to\varphi$ уравнение (4.3.2) будет переписано в виде уравнения Лапласа на плоскости $\{y,\varphi\}$ в полярных координатах y и φ -

$$y(y\phi_{,y})_{,y} + \phi_{,\varphi,\varphi} = 0 \qquad (4.3.3)$$

для которого может быть поставлена краевая задача Дирихле

$$\phi\,\big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \phi\,\big|_{y=y_0} = \phi(y_0,\varphi) \qquad (4.3.4)$$

Решение задачи (4.3.3-4) для уравнения Лапласа представимо в виде интеграла Пуассона [14]

$$\phi(y,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(y_0^2 - y^2)\phi(y_0,\varphi')\,d\varphi'}{y^2 + y_0^2 - 2yy_0\cos(\varphi-\varphi')}$$

если $0 \leqslant y < y_0$,

и (4.3.5)

$$\Phi(y,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(y^2-y_0^2)\Phi(y_0,\varphi')d\varphi'}{y^2+y_0^2-2yy_0\cos(\varphi-\varphi')},$$

если $y > y_0$ ($y_0 = \operatorname{ctg}\vartheta_0$).

Таким образом, интеграл (4.3.5) дает точное решение краевой задачи Дирихле для уравнений самосогласованного электромагнитного поля (4.3.I) $p_r|_{\vartheta=\vartheta_0} = \operatorname{sh}(\Phi(y_0,\varphi))$. Зависимость $\gamma|_{\vartheta=\vartheta_0} = \operatorname{ch}(\Phi(y_0,\varphi))$ задает распределение потенциала электромагнитного поля по углу φ.

Решение (4.3.5) может быть представлено в виде ряда при помощи разложения подинтегрального выражения

$$\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2-2\xi\cos(\varphi-\varphi')} = 1 + 2\sum_{n+1}^{\infty} T_n\{\cos(\varphi-\varphi')\}\xi^n$$

по полиномам Чебышева [14]

$$T_n(\cos(\varphi-\varphi')) = \cos(n(\varphi-\varphi')) \qquad (4.3.6)$$

($\xi = y/y_0$, если $y<y_0$; $\xi = y_0/y$, если $y>y_0$).

Рассмотрим частное решение задачи (4.3.3-4) с периодическим распределением быстроты на плоскости $\vartheta_0 = \pi/2$

$$\Phi(\vartheta_0,\varphi) = \Phi_0\sin^2 m\varphi = 0.5\Phi_0(1-\cos 2m\varphi) \qquad (4.3.7)$$

Полное решение во всем пространстве в этом случае состоит из двух членов ряда (4.3.6):

$$\Phi(\vartheta,\varphi) = 0.5\Phi_0(1 - \cos 2m\varphi\operatorname{ctg}^{2m}\vartheta/2)$$

при $\vartheta > \pi/2$ и

$$\Phi(\vartheta,\varphi) = 0.5\Phi_0(1-\cos 2m\varphi\operatorname{tg}^{2m}/2)$$

- при $\vartheta < \pi/2$.

Вычисляя компоненты напряженности магнитного поля H_ϑ, H_φ с помощью полученного решения, нетрудно убедиться, что H_ϑ непрерывна во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, а тангенциальная по отношению к граничной поверхности $\vartheta = \pi/2$ компонента H_φ испытывает разрыв при $\vartheta = \pi/2$:

$$H_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi-0} = -H_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi+0}$$

Этот скачок H_φ обусловлен наличием поверхностного тока, протекающего по плоскости $\vartheta = \pi/2$. Плотность этого тока можно представить в виде

$$j_r^S = \frac{\{H_\varphi\}}{4\pi r\sin\vartheta}\delta(\vartheta-\pi/2)$$

где $\{H_\varphi\} = H_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2-0} - H_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2+0}$ – скачок напряженности магнитно поля.

Таким образом, полный ток электронов складывается из тока электронов j_r^e вне граничной поверхности $\vartheta = \pi/2$ и поверхностного тока j_r^S на плоскости $\vartheta = \pi/2$. Введение стороннего поверхностного тока необходимо для того, чтобы удовлетворить граничным условиям при $\vartheta = \pi/2$.

Если скачок напряженности магнитного поля обусловлен скачком спина ударной электромагнитной волны, то введение поверхностного тока излишне.

Плотность тока определяется из уравнений Максвелла (4.3.I)

$$j_r^e = -\frac{I_A}{4\pi r^2\sin\vartheta}((\sin\vartheta p_{,\vartheta})_{,\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}p_{,\varphi,\varphi})$$

где $p = sh\Phi(\vartheta,\varphi)$ – радиальная компонента векторного потенциала, $I_A = mc^3/e = 17000$ A.

Ток, протекающий через поверхность сферы $r = const$,

$$I_e = \int j_r^e dS = -\frac{I_A}{4\pi}\{\int d\varphi\sin\vartheta p_{,\vartheta}\Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} + \int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}p_{,\varphi}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\}$$

причем $dS = r^2\sin\vartheta d\vartheta dy$. Последний член не дает никакого вклада в ток, поскольку $p_{,\varphi} = ch\Phi\Phi_{,\varphi} \sim \sin 2m\varphi$ обращается в нуль на границах $\varphi = 0,\ 2\pi$. Поэтому

$$I_e = -\frac{I_A}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\sin\vartheta p_{,\vartheta}\left(\Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi-0} + \Big|_{\vartheta=\pi+0}^{\vartheta=\pi}\right)$$

Так как

$$\frac{1}{ch\phi}\sin\vartheta p_{,\vartheta} = \left[\begin{array}{l} m\phi_O\cos 2m\varphi y^{2m}, \ y < 1 \\ -m\phi_O\cos 2m\varphi y^{-2m}, \ y > 1 \end{array}\right.$$

то

$$I_e = -\frac{I_A}{4\pi} 2m\phi_O \int_0^{2\pi} d\varphi \cos 2m\varphi \, ch\{\phi_O(1-\cos 2m\varphi/2\} =$$

производя замену переменных $t = 2m\varphi$

$$= -\frac{I_e}{4\pi}\phi_O \int_0^{4\pi m} dt \cos t \, ch\{\phi_O(1-\cos t)/2\} =$$

получаем окончательно

$$I_e = -2mI_A\frac{\phi_O}{2} sh(\phi_O/2) I_1(\phi_O/2) \qquad (4.3.7)$$

Было использовано интегральное представление Бесселя [14]

$$J_1(Z) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \cos\varphi e^{iZ\cos\varphi}$$

($Z = i\phi_O/2$, $I_1(x) = iJ_1(ix)$ - модифицированная функция Бесселя).

Плотность поверхностного тока на единицу азимутального угла

$$j_r^S = -\frac{2mI_A}{4\pi}\phi_O\cos 2m\varphi ch\{\phi_O(1-\cos 2m\varphi)/2\} \qquad (4.3.8)$$

Величина стороннего поверхностного тока (после интегрования по φ) $I_S = -I_e$, полный ток равен нулю. Электронный ток I_e втекает в начало координат $r = 0$ и уходит на бесконечность в виде поверхностного тока I_S, сосредоточенного в плоскости $\vartheta = \pi/2$.

Плотность тока j_r^e максимальна в плоскости $\vartheta = \pi/2$ и быстро убывает до нуля при $\vartheta \to \pi, 0$, так что при больших m весь ток электронов сосредоточен вблизи плоскости $\vartheta = \pi/2$. Максимумы плотности тока как прямого, так и поверхностного обратного тока, при $\phi_0 < 2$ ($\gamma_0 = ch\phi_0 < 6$) располагаются на линиях нулевого потенциала $\phi = 0$, при $\phi_0 > 2$ происходит смещение максимумов обратного тока к линии $\cos 2m\varphi = \pm 1/\sqrt{2}$.

Максимумы плотности прямого тока ($\cos 2m\varphi = -1$) в граничной плоскости совпадают с максимумами прямого поверхностного тока, втекающего в точку $r = 0$ и перемежаются с линиями нулевого потенциала и нулевой плотности тока. Поэтому такое распределение электронного тока приближенно описывает конфигурацию заряженной электронной плазмы в виде $2m$ пучков, сфокусированных в одну точку $r = 0$, и расположенных в плоскости $\vartheta = \pi/2$. При увеличении числа пучков каждый пучок все более сжимается по углам ϑ и φ.

При относительно малой величине максимума величины ϕ_0 токи электронных пучков вытекают из точки фокусировки вдоль линий нуля потенциала в виде поверхностного обратного тока, а при $\phi_0 > 2$ обратный ток концентрируется на границе пучков прямого тока.

При $\phi_0 \gg 1$ асимптотика выражения (4.3.7) для тока $2m$ пучков

$$I_e \approx 2mI_A\sqrt{\phi_0/\pi}\, ch\phi_0 = 2mI_A\gamma_0\sqrt{\ln(\gamma_0+(\gamma_0^2-1)^{1/2})/\pi}$$

при $\phi_0 \ll 1$ –

$$I \approx 2mI_A(\phi_0/2)^3\, 0.5 = 2mI_A U_0^{3/2}/2$$

где U_0 – максимум электрического потенциала пучка (МВ), $\gamma = 1 + eU_0/mc^2 = 1 + U_0/0.511$, $I_A = mc^3/e = 17\ 10^3$ А.

Опуская промежуточные выкладки приведем интегральные величины данной бессиловой конфигурации, заключенной в шаре $r \leqslant r_0$. Полный заряд

$$Q = e\,\frac{mc^2}{e^2}\,r_0 n\,\frac{\phi_0}{2}\,ch(\phi_0/2)\, I_1(\phi_0/2) \qquad (4.3.9)$$

$n = 2m$ – число пучков.

Полная энергия самосогласованного поля

$$\mathcal{E} = mc^2 \frac{mc^2}{e^2} r_0 \frac{n}{4} \frac{\Phi_0}{2} \operatorname{ch}\Phi_0 I_1(\Phi_0) \qquad (4.3.10)$$

Как было показано выше, инвариантная плотность массы и суммарная масса покоя частиц $M_0 = Qm/e$ определяются плотностью энергии самосогласованного поля. Приравнивая полную энергию самосогласованного электромагнитного поля $\mathcal{E}$ к энергии массы покоя M_0c^2, можно получить уравнение для определения соответствующей величины максимума потенциала Φ_0 –

$$\frac{1}{4} \Phi_0 \operatorname{ch}\Phi_0 I_1(\Phi_0) = \frac{1}{2} \Phi_0 \operatorname{ch}(\Phi_0/2)\, I_1(\Phi_0/2) \qquad (4.3.11)$$

Уравнение (4.3.11) имеет два решения: тривиальное $\Phi_0 = 0$ и $\Phi_0 = \Phi_0^m = 1.37$, что соответствует $\gamma_m = 2.08$, $U_m = 1.08mc^2/e$. Таким образом, условие равенства энергии самосогласованного поля $\mathcal{E}$ и энергии покоя частиц M_0c^2 приводит к значению максимума потенциала поля U_m такому, что энергия частицы, прошедшей разность потенциалов U_m совпадает с энергией покоя этой частицы $eU_m \approx mc^2$. Отличие составляет 8%.

Полагая $\mathcal{E} = M_0c^2$ при $\Phi_0 = \Phi_0^m$ и $n = 1$ находим, что радиус шара

$$r_0 = e^2/mc^2 = R_e$$

равен классическому радиусу электрона.

Энергия поля $\mathcal{E}$, масса покоя частиц и их заряд в зависимости от n меняются дискретно

$$\mathcal{E}_n = n\mathcal{E}, \quad Q_n = nQ, \quad M_n = n M_0$$

Поток мощности поля через поверхность шара $r = r_0$ –

$$W = - c \;(mc^2/e)^2 \frac{n}{4} \frac{\Phi_0}{2} \operatorname{sh}\Phi_0 I(\Phi_0)$$

Время, необходимое для переноса всей энергии поля $\mathcal{E}$ из объема шара потоком мощности W

$$\tau = \mathcal{E}/|W| = \frac{r_o}{c}\mathrm{ch}\Phi_o/\mathrm{sh}\Phi_o = \frac{r_o}{c}\mathrm{cth}\Phi_o = r_o/v_o$$

где $v_o = c\,\mathrm{th}\Phi_o$ - скорость частиц в максимуме потенциала Φ_o. То есть время выноса энергии поля бессиловой конфигурации из объема шара совпадает со временем перемещения частицы из центра шара до его поверхности по лучу, соответствующему максимуму потенциала.

Так как работа поля по перемещению зарядов в бессиловой конфигурации равна нулю, такой же поток мощности, но с обратным знаком, должен проходить через поверхность разрыва полей, что может быть обусловлено скачком спина ударной электромагнитной волны..

§4. Бессиловая конфигурация осевой симметрии. Краевая задача.

Согласно теореме о бессиловых конфигурациях заряженная плазма осевой симметрии характеризуется ненулевой продольной компонентой импульса $p_z = p_z(r,\varphi)$ и векторного потенциала самосогласованного электромагнитного поля. Как и в случае центральной симметрии решение уравнений самосогласованного поля сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа относительно быстроты $\phi(r,\varphi)$ такой, что $p_z = \mathrm{sh}\phi$:

$$\Delta\phi = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}\phi) + r^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\phi = 0 \qquad (4.4.1)$$

с граничным условием

$$\phi\,|_{r=r_o} = b(\varphi) \qquad (4.4.2)$$

Внутри круга $r < r_o$ решение задачи (4.4.1-2) представимо интегралом Пуасссона

$$\phi(x,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{(1 - x^2)b(\varphi')d\varphi'}{1 + x^2 - 2x\cos(\varphi - \varphi')} \qquad (x = r/r_o<1)$$

разлагая который по полиномам Чебышева $T_n(\cos(\varphi-\varphi')) = \cos(n(\varphi-\varphi'))$,

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(\varphi')d\varphi' + \frac{x^n}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi'\, b(\varphi')\cos(n(\varphi-\varphi')) \qquad (4.4.3)$$

Задавая периодическое распределение быстроты $\phi(r,\varphi) = b(\varphi) = \phi_0(1-\cos 2m\varphi)/2$ на окружности $x = 1$, с помощью разложения (4.4.3) нетрудно получить решение краевой задачи (4.4.I-2):

$$\phi(x,\varphi) = \phi_0(1 - x^{2m}\cos 2m\varphi)/2$$

Это решение аналогично решению (4.3.3) для случая центральной симметрии.

Зарядовая плотность

$$-4\pi\rho_e = \Delta\gamma = r\left(x^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\gamma\right) + x^{-2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\gamma\right)$$

Плотность тока $-j_z = \rho_e\frac{p_z}{\gamma}mc^3/e$.

Ток внутри круга $x < 1$:

$$I_{in} = -(I_A/4\pi)\int_0^1 xdx\int_0^{2\pi} d\varphi\left(x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{sh}\phi\right) + x\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\mathrm{sh}\phi\right) =$$

$$=-(I_A/4\pi)\left\{\int_0^{2\pi} d\varphi x\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{sh}\phi\,\Big|_{x=0}^{1} + \int_0^{1}\frac{dx}{x}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathrm{sh}\phi\,\Big|_{\varphi=0}^{2\pi}\right\} \qquad (4.4.4)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathrm{sh}\phi = \mathrm{ch}\phi\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi = \mathrm{sh}\phi\,(\phi_0/2)2m\sin 2m\varphi x^{2m},$$

то второй член (4.4.4) на границах интегрирования обращается в нуль. Поэтому

$$I_{in} = (I_A/4\pi)2m(\phi_0/2)\int_0^{2\pi}\mathrm{ch}\{\phi_0(1-\cos 2m\varphi)/2\}\cos 2m\varphi d\varphi =$$

$$= -I_A 2m(\varphi_0/4)I_1(\varphi_0/2)\mathrm{sh}(\varphi_0/2) \quad (4.4.5)$$

где $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $I_A = mc^3/e = 17\ 10^3$ А.

Таким образом, величина тока внутри круга $x < 1$ определяется точно такой же формулой, что и в задаче центральной симметрии с тем же самым граничным условием (4.3.2). Точно также полный ток внутри круга I_{in} складывается из 2m токов отдельных пучков. Поэтому данное решение соответствует разбиению пучка в вакууме на 2m отдельных пучков.

Азимутальная компонента напряженности магнитного поля

$$eH_\varphi/mc^2 = r_0^{-2}(\Phi_0/2)2m\mathrm{ch}\Phi\cos 2m\varphi x^{2m-1}$$

Радиальная компонента магнитного поля

$$eH_r/mc^2 = r_0^{-1}x^{-1}(\Phi_0/2)2m\mathrm{ch}\Phi\sin 2m\varphi x^{2m-1}$$

При 2m = 1 магнитное поля на оси $r = 0$ $H_0 = (H_\varphi^2 + H_r^2)^{1/2} \neq 0$, в остальных случаях поле на оси равно нулю.

Напряженность магнитного поля на границе $x = 1$

$$H = r_0^{-1}(\Phi_0/2)2m\{\Phi_0(1-\cos 2m\varphi)/2\}$$

В области $r > r_0$ решение задачи находится по формуле Кельвина для функции $\phi_{in}(r,\varphi) = \phi(r^{-1},\varphi)\ \big|_{r<r_0}$, аналогично задаче центральной симметрии.

Вычисление объемного заряда на единицу длины в области $r < r_0$ с помощью интегрального представления функций Бесселя приводит к следующему выражению

$$Q_{in} = -(mc^2/e)(m\Phi_0/2)I_1(\Phi_0/2)\mathrm{ch}(\Phi_0/2)$$

Таким образом, на примере периодического распределения потенциала показано, что бессиловая конфигурация осевой симметрии может существовать во всем пространстве только при наличии полной зарядовой и токовой нейтрализации поверхностным слоем заряда и тока или же за счет скачка спина самосогласованного поля ударной волны, когда заряд и ток не нейтрализованы. В нерелятивистском пределе ток зависит от числа пучков и не превышает альфвеновского предельного тока в вакууме. В релятивистском случае полный продольный ток не ограничен и при больших токах пучок разбивается на некоторое число отдельных пучков с током порядка альфвеновского предельного тока в каждом пучке.

§5. Конформная связь бессиловых конфигураций центральной и осевой симметрии.

Согласно приведенным результатам бессиловые конфигурации центральной и осевой симметрии обладают одинаковыми полными энергиями самосогласованного поля, зарядами и токами. Более того, они заданы одинаковыми функциями потенциала поля с точностью до замены угловых координат на полярные координаты, используемые в качестве переменных задачи осевой симметрии. Преобразование этого вида порождает стереографическую проекцию сферы на плоскость. Так что распределение быстроты в плоскости поперечного сечения пучка представляет стереографическую проекцию сферического распределения быстроты задачи центральной симметрии.

Можно рассматривать этот результат как следствие конформной инвариантности уравнений самосогласованного поля. Поэтому решение любой задачи центральной симметрии можно легко определить по решению задачи осевой симметрии с соответствующими граничными условиями.

В силу конформной инвариантности уравнений самосогласованного поля полученные решения определяют соответствующие решения уравнений в пространстве ненулевой кривизны. В случае однородного изотропного пространства - времени с метрикой (3.3.I) энергия бессиловой конфигурации, вычисленная по формуле (3.3.3) оказывается конечной при $\varkappa = 1$. То есть в случае закрытой метрики.
Так как в силу релятивистской инвариантности, любое стационарное решение с помощью преобразования Лоренца преобразуется к виду квазистационарной волны, то рассмотренная бессиловая конфигурация описывает частицеподобное решение, энергия которого конечна, если поместить конфигурацию в пространстве с закрытой метрикой.
В силу конформной инвариантности решения уравнений самосогласованного поля в плоском пространстве Минковского и в конформно

эвклидовом пространстве должны расматриваться как физически эквивалентные. Использование конформной инвариантности позволяет расматривать динамику частиц в бессиловых конфигурациях заряженной плазмы следующим образом : поскольку в этом случае движение частиц происходит без воздействия какой - либо силы, то такие движения могут быть рассмотрены и как движение по геодезическим некоторого пространства, геометрические свойства которого отличаются от свойств пространства Минковского. В качестве такого пространства может быть использовано не только риманово пространство, но и пространство с кручением. При самосогласованном описании геометрические свойства этого пространства должны определяться характеристиками плазмы.

Теория взаимодействующих частиц и электромагнитного поля в в пространстве с кручением [50] приводит к уравнениям, аналогичным уравнениям самосогласованного электромагнитного поля. Введение кручения пространства в подходе Эйнштейна - Картана позволяет определить спин физического поля в терминах геометрического кручения [33]. Обобщение этого подхода на случай калибровочных полей, таких как электромагнитное поле, проблематично в силу неинвариантности тензора спинового момента относительно калибровочных преобразований. Для решение этого вопроса необходимо построение теории динамического кручения.

Часть II.

Электромагнитное поле в пространстве с кручением.

Глава I.

Проблема калибровочной инвариантности в теории полей динамического кручения.

§ I. Погружение электромагнитного поля в поле связности в качестве следа тензора кручения.

Общепризнанной основой теоретической физики элементарных частиц является в настоящее время теория калибровочных полей

(см. [21], с. 19 – 21). Расширение принципа калибровочной инвариантности дает возможность единого объяснения всей иерархии существующих в природе взаимодействий. Геометрическая интерпретация калибровочных полей (полей Янга- Миллса) в качестве связности, определяющей параллельный перенос в зарядовом пространстве и кривизну этого пространства, позволяет конструировать уравнения динамики поля единственно возможным образом. Введение взаимодействия калибровочных полей с заряженными полями производится путем замены производных в уравнениях движения полей на ковариантные.

В теории динамического кручения вопрос о взаимодействии калибровочных полей с полями кручения проблематичен, поскольку в литературе [22-50] высказываются различные точки зрения по поводу сохранения калибровочной инвариантности.

Калибровочное электромагнитное поле A_α, как показано в одной из первых работ по динамическому кручению [22], может быть рассмотрено в качестве векторной геометрической характеристики ковариантной производной заряженного спинорного поля, определенной по методу Фока и Иваненко для галилеевой метрики пространства с кручением, причем псевдослед тензора кручения соответствует полю псевдовекторных мезонов. Источником мезонного поля является псевдовектор спинового момента.

Динамика электромагнитного поля при таком подходе не является самосогласованной, поскольку (см. [24], с.34) электромагнитное поле в этом случае вводится как внешнее геометрическое поле. В последующей работе [23] компоненты электромагнитного поля рассматривались в качестве компонент кручения $Q_{5\alpha\beta}$ пятимерного пространства.

В работе [26] электромагнитное поле сопоставляется следу тензора кручения $Q^{\alpha}_{\mu\alpha}$ как единственной векторной величине, характеризующей кручение.

Обобщение данного подхода на пространство с кручением произвольного вида требует учета бесследовой части тензора кручения $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$, характеризующей тензорное поле спина 2 – аналог гравитационного поля. Решение этой задачи позволит определить форму взаимодействия электромагнитного поля с полями кручения, удовлетворяющую требованиям калибровочной инвариантности.

§ 2. Калибровочно- инвариантное действие полей кручения в

пространстве произвольной размерности.

Лагранжиан полей кручения $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$ стройтся по аналогии со свободным лагранжианом электромагнитного поля $\mathcal{L}_0 = -1/4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, рассматриваемым как квадратичная свертка тензора кривизны $F_{\mu\nu}$ зарядового пространства, из квадратичных сверток тензора кривизны $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$, а также тензора Риччи $R_{\mu\nu}$ пространства Минковского с кручением $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$. Для того, чтобы выделить эффекты кручения при обобщении теории на пространства аффинной связности с метрикой, отличающейся от метрики пространства Минковского, удобно использовать алгебраическое тождество (см. [25], с.132)

$$R_{[\mu\nu\lambda]}^{\ \ \alpha} = 2\nabla_{[\mu}Q^{\alpha}_{\nu\lambda]} - 4Q^{\rho}_{[\mu\nu}Q^{\alpha}_{\lambda\rho]},$$

определяющее тензор $R_{[\mu\nu\lambda]}^{\ \ \alpha}$, антисимметричный по всем нижним индексам, в терминах тензора кручения, ∇_{μ} – ковариантная производная, определенная в средней связности (см. [25], с.129)

$$\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = (\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})/2$$

взаимных связностей $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ пространства с кручением $Q^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$. Средняя связность $\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ симметрична по нижним индексам μ, ν, и определяет параллельный перенос в пространстве с кручением.

$$R_{[\mu\nu\lambda]}^{\ \ \alpha} = 1/3(R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} + R^{\alpha}_{\nu\lambda\mu} + R^{\alpha}_{\nu\mu\lambda}).$$

Рассмотрим лагранжиан вида

$$\mathcal{L}_Q = a\, R_{[\lambda\mu\nu]\rho}R^{[\lambda\mu\nu]\rho} + b\, R_{[\alpha\nu\lambda]}^{\ \ \alpha}R^{[\beta\nu\lambda]}_{\ \ \beta}$$

с некоторыми коэффициентами a, b. Необходимо показать, что коэффициенты a, b можно выбрать таким образом, что

$$\mathcal{L}_Q = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_1,$$

где $\mathcal{L}_q$ – лагранжиан псевдовекторного мезонного поля, $\mathcal{L}_1$ – лагранжиан поля бесследовой части тензора кручения, $\mathcal{L}_0$ – лагранжиан свободного электромагнитного поля ($\mathcal{L}_0 = -1/(4e^2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$), $F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ (∂_{μ} – производная в плоском пространстве без кручения), где A_μ – след тензора кручения

$$Q^\lambda_{\mu\nu} = 2\delta^\lambda_{[\mu}A_{\nu]} + \varepsilon^\lambda{}_{\mu\nu\rho}q^\rho + S^\lambda_{\mu\nu}$$

q_μ – псевдослед, $S^\lambda_{\mu\nu}$ – бесследовая часть кручения ($\varepsilon^\lambda{}_{\mu\nu\rho}S^{\mu\nu\rho} = S^\mu_{\mu\nu} = 0$), $\varepsilon^\lambda{}_{\mu\nu\rho}$ – антисимметричный тензор, $2\delta^\lambda_{[\mu}A_{\nu]} = \delta^\lambda_\mu A_\nu - \delta^\lambda_\nu A_\mu$, след $Q^\lambda_{\mu\lambda} = A_\mu(d-1)$, $d = \delta^\alpha_\alpha$ – размерность пространства с кручением.

Непосредственное выполнение операций приведения лагранжиана $\mathcal{L}_Q$ к калибровочно-инвариантному виду можно проводить с помощью замены ковариантной производной ∇_μ на производную ∂_μ в тождестве, связывающем $R^{\ \alpha}_{[\mu\nu\lambda]}$ и $Q^\lambda_{\mu\nu}$, используя перестановочность операции симметрирования, альтернирования и свертки с операцией взятия ковариантной производной (см. [25], с.124). Так как никакие другие операции при этом не используются, то в окончательном выражении $\mathcal{L}_Q$ достаточно произвести обратную замену ∂ на ∇_μ.

Непосредственная подстановка $Q^{\lambda\ \mu}_{\mu\nu}$ в $\mathcal{L}_Q$ показывает, что требованию калибровочной инвариантности лагранжиан $\mathcal{L}_Q$ удовлетворяет при следующих значениях постоянных a, b:

$$a = -b(d-2)/3 = (3/16)(d-2)^{-1},$$

$$b = -(9/16)(d-2)^2.$$

(правильная физическая размерность кручения получается, если A_μ входит со множителем 1/e).

Калибровочно-инвариантный лагранжиан взаимодействия полей Φ с полями кручения A_μ, q_μ, $S^\lambda_{\mu\nu}$ (в форме минимального взаимодействия) записывается в виде [26]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_Q + \mathcal{L}_M(\Phi, \nabla\Phi) +$$

$$(3/16)(d-2)^{-1}R_{[\lambda\mu\nu]\rho}R^{[\lambda\mu\nu]\rho} - (9/16)(d-2)^{-2}R^{\ \alpha}_{[\alpha\nu\lambda]}R^{[\beta\nu\lambda]}_{\ \ \beta} + \mathcal{L}_M(\Phi, \nabla\Phi)$$

где $\mathcal{L}_M$ получается из свободного лагранжиана полей Φ заменой обычных производных на ковариантные.

§3. Калибровочное преобразование электромагнитного поля как генератор конформного преобразования пространства с кручением.

Пространство с кручением представляет простейшее обобщение

Все действительно так, но коэффициент при действии ЭМП равен нулю.

Поэтому след кручения не является динамической переменной.

риманова пространства, характеризуемого метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. Связность $\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$ пространства с кручением $Q^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$

$$\Gamma^{k}{}_{ij} = \{^{k}{}_{ij}\} + 2Q_{(ij)}{}^{k}+Q^{k}{}_{ij}-1/2g^{kp}(K_{ipj}+K_{jpi}-K_{ijp})$$

где $\{^{k}{}_{ij}\}$ - скобки Кристоффеля, $K_{ijl} = \nabla_{l}g_{ij}$ - коэффициенты неметричности (∇_{α} - ковариантная производная в пространстве с кручением). Связность $\Gamma^{k}{}_{ij}$ можно переписать в виде

$$\Gamma^{k}{}_{ij}=\overset{c}{\Gamma}{}^{k}{}_{ij}+Q^{k}{}_{ij}$$

где $\overset{c}{\Gamma}{}^{k}{}_{ij}$ - средняя связность, определяющая параллельный перенос тензоров в пространстве с кручением. Отсюда следует-

$$\overset{c}{\Gamma}{}^{k}{}_{ij}=\{^{k}{}_{ij}\}+2Q_{(ij)}{}^{k}-1/2g^{kp}(K_{ipj}+K_{jpi}-K_{ijp})$$

Тензор кручения

$$Q^{l}{}_{mn}=2\delta^{l}{}_{[m}A_{n]}+\varepsilon^{l}{}_{mnl}q^{l}+S^{l}{}_{mn}$$

В теории с динамическим кручением след A_{μ}, псевдослед q_{μ}, и бесследовая часть тензора кручения $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ являются независимыми динамическими переменными. Векторное поле A_{μ} можно рассматривать как калибровочное поле. В этом случае оказывется, что калибровочное преобразование $A_{\mu}\to A_{\mu} - \partial_{\mu}\sigma$ производит преобразование связности пространства с кручением-

$$\overset{c}{\Gamma}{}^{k}{}_{ij} \to \overset{c}{\Gamma}{}^{k}{}_{ij}+T^{k}{}_{ij}$$

где $T^{k}{}_{ij}=\delta^{k}_{i}\partial_{j}\sigma+\delta^{k}_{j}\partial_{i}\sigma-2g_{ij}\partial^{k}\sigma$ - тензор аффинной деформации.
Тензор $T^{k}{}_{ij}$ представим в виде композиции двух тензоров $T1^{k}{}_{ij}+T2^{k}{}_{ij}$

$$T1^{k}{}_{ij}= \delta^{k}_{i}\partial_{j}(2\sigma)+\delta^{k}_{j}\partial_{i}(2\sigma)-g_{ij}\partial^{k}(2\sigma)$$

$$T2^{k}{}_{ij}=\delta^{k}_{i}\partial_{j}(-\sigma)+\delta^{k}_{j}\partial_{i}(-\sigma)$$

Тензор $T1^{k}{}_{ij}$ соответствует конформному преобразованию связности, $T2^{k}{}_{ij}$ - проективному преобразованию связности.
Таким образом, калибровочное преобразование следа A_{μ} производит композицию из конформного и проективного преобразования связности. Требование калибровочной инвариантности в этом случае приводит к

требованию инвариантности относительно преобразования связности указанного вида.

Если средняя связность псевдоэвклидова (для этого достаточно подчинить коэффициенты неметричности условию

$$2Q_{(ij)}{}^{k}=1/2g^{kp}(K_{ipj}+K_{jpi}-K_{ijp})$$

и $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ – лоренцева метрика), то преобразование связности можно свести к конформному преобразованию и, следовательно, требование калибровочной инвариантности может приводить к требованию конформной инвариантности.

Действительно, как известно, проективно - евклидово риманово пространство (в результате действия проективного преобразования $T2^{k}{}_{ij}$) есть пространство постоянной кривизны, являющееся в то же время конформно- эвклидовым. Композиция двух конформных преобразований (эквивалентное действию $T1^{k}{}_{ij}+T2^{k}{}_{ij}$) – также конформное преобразование связности. Поэтому преобразование псевдоэвклидовой связности, задаваемое тензором $T^{k}{}_{ij}$, приведет к конформно - плоскому пространству.

Реализация указанной возможности соответствия требования конформной инвариантности требованию калибровочной инвариантности имеет место в следующем случае. Рассмотрим спинорное поле в пространстве с кручением, след A_{μ} которого ассоциирован с потенциалом калибровочного электромагнитного поля. Уравнения спинорного поля как известно конформно-инвариантны, а уравнения электромагнитного поля конформно-инвариантны в пространстве размерности 4. То есть в пространстве четырех измерений взаимодействующие спинорное и электромагнитное поля удовлетворяют одновременно требованиям калибровочной и конформной инвариантности.

В этом случае должна иметь место и масштабная симметрия или скейлинг, поскольку группа масштабной симметрии является подгруппой группы конформной симметрии. То есть скейлинг или масштабная инвариантность представляет следствие калибровочной инвариантности.

Следовательно, нарушение калибровочной симметрии (например, спонтанное нарушение калибровочной симметрии в явлении сверхпроводимости) должно сопровождаться соответствующим нарушением скейлинга или масштабной инвариантности.

Это – проверяемые следствия данной теории динамического кручения, а также – обоснование гипотезы скейлинга Бьоркена в глубоко – неупругом рассеянии лептонов на адронах.

Связь между калибровочной и конформной симметрией имеет место в теориях супергравитации (хотя это и не является общепринятым).

§ 4. Мультиплет полей кручения в пространстве размерности четыре

В случае спинорного поля Ψ ковариантная производная в пространстве размерности 4 для лоренцевой метрики определяется аналогично формуле (2) работы [22], определенной по методу Фока и Иваненко для галилеевой метрики, в которой коэффициенты вращения Риччи $\Delta_\alpha(\alpha\beta) = 0$, (следствие формулы (I.9.I) работы [24]) –

$$\nabla_\alpha\Psi = (\partial_\alpha - iA_\alpha e - 1/4\, Q_{\alpha\beta\delta}\gamma^\beta\gamma^\delta)\Psi,$$

$$\mathcal{L}_M(\Psi,\nabla\Psi) = \frac{i}{2}(\Psi^+\gamma_\lambda\partial^\lambda\Psi - \partial_\lambda\Psi^+\gamma_\lambda\Psi) + e\Psi^+\gamma_\lambda\Psi A^\lambda + \Psi^+\gamma_\lambda\gamma_5\Psi q^\lambda$$

γ_5 – матрица Дирака.

В этом случае при отсутствии бесследовой части

$$\mathcal{L}_Q = -1/4e^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 1/8(\partial_\mu q_\mu)^2 + 1/8\partial_\mu q_\nu \partial^\nu q^\mu + 1/2(\partial_\mu q^\mu)^2$$

– лагранжиан свободных безмассовых полей A_μ, q_μ.

Следует заметить, что особенность лагранжиана $\mathcal{L}$ в пространстве размерности $d = 2$ –стираемая. Это связано с тем что в этом случае любое пространство аффинной связности является полусимметрическим с кручением вида $\delta^\lambda_{[\mu}Q_{\nu]}$, ($Q_\mu$ – след кручения).

В случае пространства с кручением произвольного вида требованию калибровочной инвариантности удовлетворяет только один вид взаимодействия A_μ и полей кручения– взаимодействие гравитационного вида, которое вводится в лагранжиане $\mathcal{L}_Q$ путем замены производной ∂_μ на ковариантную ∇_μ, определенную в связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, определяющей параллельный перенос векторов в пространстве с кручением.

Глава 2.

Теория самосогласованного электромагнитного поля в пространстве с кручением

§ I. Физическая интерпретация криволинейного пространства с кручением

Лагранжиан $\mathcal{L}_Q$ полей A_μ, q_μ, $S^\lambda_{\mu\nu}$, объединенных в мультиплет полей кручения

$$Q^\lambda_{\mu\nu} = 2\delta^\lambda_{[\mu}A_{\nu]}/e + \varepsilon^\lambda_{\mu\nu\rho}q^\rho + S^\lambda_{\mu\nu}$$

характеризуется постоянной e, имеющей смысл электрического заряда физических полей Φ. В силу произвольности вида полей Φ и целочисленности электрического заряда наблюдаемых в природе полей e может принимать различные целые значения. При больших e след кручения $Q_\nu = -(d-1)A_\nu/e$ исчезающе мал так, что в пределе $e \to \infty$ $Q_\nu \to 0$ – кручение пространства с нулевым следом. Вместе с тем следовый член лагранжиана $\mathcal{L}_Q$ в этом пределе не исчезает, и по прежнему будет определять лагранжиан свободного электромагнитного поля за счет сокращения с множителем e^2, общим для всех членов $\mathcal{L}_Q$. При этом вклады в лагранжиан полей q_ν и $S^\lambda_{\mu\nu}$ должны стремиться к нулю, иначе интеграл действия будет расходится.

Таким образом, в пределе $e \to \infty$ электромагнитное поле освобождается от связи с геометрической характеристикой следа кручения Q_ν и принимает свой обычный вид векторного поля в пространстве Минковского без кручения, поскольку кривизна и кручение обращаются в нуль. Предел $e \to \infty$ соответствует пределу большого числа частиц $N \to \infty$ общим зарядом e, то есть макроскопическому пределу классических полей.

Следовательно постоянная e в лагранжиане полей кручения определяет степень связи электромагнитного поля и геометрического кручения.

Возможен и промежуточный случай, когда в макроскопическом пределе $e \to \infty$ след тензора кручения равен нулю, но псевдослед и бесследовая часть ненулевые.

Действительно, согласно [50], движение частицы зарядом Q, массой M в гравитационном и электромагнитном полях можно рассматривать как состояние четырехмерного пространства со связностью

$$L_{ikl} = \Gamma_{ikl} + B_{ikl}$$

где Γ_{ikl} определяет скобки Кристоффеля, а несимметричная по k и l часть

$$B_{ikl} = (1/Mc)(\partial_i \overline{P}_k - \partial_k \overline{P}_i)u_l \qquad (2.I.I)$$

$\overline{P}_i = p_i + QA_i/c$, $P_i = Mcu_i$, A_i – электромагнитное поле, u_i – вектор 4 – скорости частицы. Связность удовлетворяет условию $B_{ik}{}^{k} = 0$, совпадающему с уравнениями движения частицы в электромагнитном поле. Тензор кручения $B_{i[kl]}$ обладает нулевым следом. Выполнено условие метричности

$$\nabla_l g_{ik} = g_{ik;l} - g_{in}B^{n}_{kl} - g_{kn}B^{n}_{il} = 0$$

Следует заметить, что, как показано в части I, за счет калибровочного преобразования потенциалов всегда существует решение уравнений движения, связывающее импульс частицы и потенциал электромагнитного поля $p_i = -QA_i/c$, когда $\overline{P}_i = 0$. На этих решениях неметрическая часть связности B_{ikl} работы [50] равна нулю. Этот случай полностью соответствует пределу классических полей $e \to \infty$, рассмотренному выше.

Динамика кручения в этом пределе отсутствует, и поэтому учет самосогласованного взаимодействия электромагнитного поля и частиц (при ненулевой плотности заряда) может проводится как в теории Эйнштейна – Картана путем добавления к лагранжиану членов вида скаляра кривизны пространства с бесследовым кручением, что и было сделано при формулировке лагранжиана модели [50]

$$L = (c^4/16\pi G)(R + 2B^{ik}{}_{k;i} + B_{ikl}B^{ikl})(-g)^{1/2}$$

где $B_{ikl} = \partial_{[k}w_{i]}w_l$, $g = \det\{g_{mn}\}$, G – гравитационная постоянная, $w_i = u_i + kA_i$, k – произвольная постоянная.

Уравнения Эйлера для лагранжиана L

$$(H^{ik}w_l w^l)_{;k} = (1/2)w^i H_{nm}H^{nm} \qquad (2.I.2)$$

где $H_{ik} = \partial_{[k}w_{i]}$.

Уравнения (2.I.2) при k = 0 аналогичны уравнениям самосогласованного электромагнитного поля, взаимодействующего с гравитационным полем, которое введено путем замены производных $\partial_k w \to \nabla_k w = w_{;k}$. Однако, в этом случае зависимость от электромагнитного поля выпадает, а при $k \neq 0$ теория калибровочно неинвариантна.

§ 2. Уравнения самосогласованного электромагнитного поля в пространстве с кручением.

Требование калибровочной инвариантности применительно к лагранжиану [50] будет выполнено, если положить значение постоянной $k = 0$. В этом случае $w_i = u_i$, $w_l w^l = u_l u^l = 1$ уравнения (2.I.2) приводятся к виду уравнений самогласованного поля

$$H^{ki}{}_{;k} = (1/2)u^i H_{mn} H^{mn}$$

взаимодействующего с гравитационным полем. Однако, соответствующий гамильтониан [50] будет отличаться от требуемого множителем ~ $1/G$.

Поэтому можно поступить следующим образом. Положим в соотношении $w_i = u_i + kA_i$, $A_i = - mc^2 u_i/Q$, как это следует из уравнений движения. Тогда $w_i = bu_i = (1-kmc^2/Q)u_i$. Постоянная b определяется из условия правильной записи гамильтониана поля u_k:

$$b = (m^2 G/16\pi Q^2)^{1/4} .$$

Если Q и m - заряд и масса электрона, то b ~ 10^{-10}.

Постоянная b определяет связь неметрической части связности пространства с кручением $B_{ikl} = b^2 \partial_{[k} u_{i]} u_l$ с самосогласованным полем u_ν. В случае, когда гравитационным полем можно пренебречь при $G \to 0$ $b \to 0$ $B_{ikl} \to 0$ связь самосогласованного электромагнитного поля с гравитационным полем аннулируется так же, как и в пределе $e \to \infty$ исчезновения следа кручения.

Список литературы

1. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. – Л.: изд-во ЛГУ, 1976. – 294 с.

2. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. -527 с.

3. Девидсон Р. Теория заряженной плазмы. – М.: Мир, 1978. – 215 с.

4. Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. – М.: Атомиздат, 1975. – 347 с.

5. Ишимару С. Основные принципы Физики плазмы. – М.: Атомиздат, 1977. – 288 с.

6. Mahankov V. G., Dynamics of classical solitons (non-integrable system), Phys. Reports 35, No1 (1978), p. 1-128.

7. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1988. – 416 с.

8. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. –М.: Атомиздат, 1980. – 295 с.

9. Электродинамика плазмы. – Под ред. Ахиезера А. И., М.: Наука, 1978. – 719 с.

10. Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А. Электродинамика. – М.: Наука. 1978. – 352 с.

11. London F., (Dower, New-York,1960).

12. Агафонов А. В., Веренин В. С., Лебедев А. В. и др. Транспортировка сильноточного электронного пучка магнитным полем. – ЖТФ, 44, 1974., с. 1909.

13. Гордеев А. В. Магнитная самоизоляция вакуумных коаксиальных линий. – М:, 1978. (Препринт, №3076)

14. Greedon J. M., Relativistic Brilloin flow in the high ν/γ diode, J. Appl. Phys. Vol. 46 (1975), No7, p. 2946-2955.

15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1978. – 831 с.

16. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

17. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т 4. – М.: наука, 1974. – 550 с.

18. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. Теория сильноточных диодов большого радиуса. – Новосибирск, 1977. (препринт/ИЯФ: 77-120).

19. Белогорский В. В. и др. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, №3, 1985, с. 149-152.

20. Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. токи в физике адронов. – М.: Мир, 1978. – 670 с.

21. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. – М.: Наука, 1988. – 267 с.

22. Родичев В. И. Пространство с кручением и нелинейные уравнения поля. – ЖЭТФ, 40, вып. 5, 1961, с. 1469-1472.

23. Родичев В. И.// Изв. Вузов (Физика), №2, 1963, с. 122-124.

24. Владимиров Ю. С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. – М. изд-во МГУ, 1987. – 215 с.

25. Норден А. П. Пространство аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 215 с.

26. Сыромятников А. Г. Проблема калибровочной инвариантности в теории поля с динамическим кручением. – ТМФ, т. 87, №1, апрель, 1991, с. 157-160.

27. Weil H., Phys. Rev. V. 77, 1950, p. 699-707.

28. Волович И. В., Катанаев М. О. Скалярные поля и динамическое кручение в теориях типа Калуцы-Клейна. – ТМФ, т. 66, №1, с.79-89.

29. Neville D. E., Experimental bounds on the coupling strength of torsion potentials, Phys. Rev. V. D21 (1980), No8, p. 2075-2080.

30. Neville D. E., Rev. Mod. Phys. V. 48 (1976), No3, p. 393-416.

31. Катанаев М. О. Кинетическая часть теории динамического кручения. – ТМФ, т. 72, №1, 1987.

32. Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 163 с.

33. Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сардпнашвили Т. А. Калибровочные теории гравитации. – М.: МГУ, 1985. – 141 с.

34. De Sabbata V. and Gasperini M., Phys. Lett. 1980, v. A77, p. 300-301.

35. Mukku C., Sayed W., Torsion without torsion, Phys. Lett. 1989, v. B82, p. 382-386.

36. Hojman S., Rosenbaum M., Ryan M., Gauge invariance, minimal coupling and torsion, Phys. Rev. 1978, v. D17, p.3141-3167.

37. Hojman S., Mukku C. and Sayed W.,Pairity violation in metric-torsion theories of gravitation, Phys. Rev. 1980, v. D22, p.1915-1921.

38. Hojman S., Rosenbaum M., Ryan M., Phys. Rev. 1979, v. D19, p.430-437.

39. Denardo G., Spallucci E., Classical & Quantum Gravity (GB), Vol. 4, No1, p. 89-99 (jun. 1987).

40. Hehl F. W., von der Heyde P. at al., Rev. Mod. Phys. 48 (1976), 393.

41. Hayashi K., Bregman A., Ann. Phys. 1973, V. 75, p. 562-600.

42. Trautman A., Symp. Math. 1973, Vol. 12, p. 139-160.

43. Hayashi K. and Sasaki R., Spinor electrodynamics in the Riemann-Cartan space and dynamical theory of axial vector torsion propagating in vacuum., Nuovo Cimento 1978, V. 45B, p. 205-228.

44. Kerlick G. D., Ann. of Phys. 1976, Vol. 99, p. 127-141.

45. Hehl F. W., von der Heyde P. at al., Phys.Rev. 1974, V. D10, p. 1066-1069.

46. Kibble, J. Math. Phys. 2 (1961), 212.

47. Novello M., Phys. Lett. 59A (1976), p. 105-106.

48. Von der Heyde P., Z. Naturforsh 1976, V. 31, p. 1725-1726.

49. Prasanna A. R., Phys. Lett. 54A (1975), p. 17-18.

50. Шарин Ю. А. Изв. вузов (физика), №10, 1990, с. 59-62.

Отпечатано тип. Вика. 1993 г.